

(5p) Uppgift 1

Företaget XAJA tillverkar två olika sorters rengöringsprodukter för fönsterputsning, benämnda F1 och F2. Förutom vatten, som ingår i båda produkterna är, innehållet ett antal olika kemikalier. Dessa kemikalier är hemliga och benämns endast med K1, K2, K3 och K4. För att producera 1 liter fönsterputs av typen F1 går det åt 2 deciliter K1, 3 deciliter K3 och 3 deciliter K4. För att producera 1 liter av F2 går det åt 1 deciliter K1, 2 deciliter K2 och 3 deciliter K4. Resterande innehåll i båda produkterna är sedan vatten, men då kostnaden är så pass låg för inköp av vatten och då företaget förväntar sig att tillgången till vatten är obegränsad kan vi här bortse från denna resurs.

Vinsten (exklusive kostnaden för inköp av kemikalier) vid försäljning av 1 liter fönsterputs är 2 kr för F1 och 3 kr för F2.

Kemikalier kan köpas från två olika leverantörer (L1 och L2), och för den kommande produktionsperioden (1 månad) kan de två företagen maximalt leverera mängder enligt nedanstående tabell, där även priser återfinns.

	Max leverans i liter		Pris i kronor per liter	
	L1	L2	L1	L2
K1	100 000	50 000	1,2	1,4
K2	100 000	40 000	1,3	1,1
K3	50 000	100 000	2,1	2,3
K4	10 000	140 000	2,2	2,3

Produktionen den kommande månaden har en begränsning på totalt 500 000 liter fönsterputs.

Din uppgift är att formulera företagets vinstmaximeringsproblem som ett LP (dvs. ett linjärt problem med kontinuerliga variabler), för att bestämma optimal produktion och inköp den kommande månaden.

Det finns inget krav att använda summering och indexering för att lösa uppgiften. Däremot måste ingående variabler och ev. parametrar definieras.

(5p)

(5p) Uppgift 2

Ett företag tillverkar fyra olika plastprodukter med återvunnen plast som huvudråvara. För varje produkt går det åt 10, 20, 24 respektive 16 kg återvunnen plast för att tillverka en enhet. Totala tillgången av återvunnen plast under planeringsperioden är 2500 kg. Tillgänglig total processtid är 300 timmar och processtiden för produkterna är 1 h/enhet. Till en extra kostnad av 5 kr/kg kan nytillverkad plast köpas in och användas i produktionen, dock maximalt 500 kg. Vinsten på produkterna är 65, 56, 60 respektive 75 kronor/enhet (efter avdrag för normala råvarukostnader, normala processtids-kostnader mm). Företaget räknar med att kunna sälja allt som produceras. Pga. ett långsiktigt kontrakt måste minst 30 enheter av produkt 3 tillverkas under planeringsperioden.

Företagets problem att maximera vinsten kan formuleras enligt nedan.

Variabeldeklaration:

x_1 = antal produkt 1 som tillverkas

x_2 = antal produkt 2 som tillverkas

x_3 = antal produkt 3 som tillverkas

x_4 = antal produkt 4 som tillverkas

y = mängd inköpt ny plast i kg

$$\max z = 65x_1 + 56x_2 + 60x_3 + 75x_4 - 5y$$

$$\begin{aligned} \text{då} \quad 10x_1 + 20x_2 + 24x_3 + 16x_4 - y &\leq 2500 && \text{(tillgång råvara)} \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leq 300 && \text{(tillgång tid)} \\ y &\leq 500 && \text{(max inköp av ny plast)} \\ x_3 &\geq 30 && \text{(produktionskrav)} \\ x_1, x_2, x_3, x_4, y &\geq 0 && \text{(icke-negativitet)} \end{aligned}$$

Modellen har lösts med AMPL/CPLEX och utdata finns på nästa sida. Utgå från utdata på nästa sida och besvara frågorna.

För var och en av deluppgifterna nedan, ange om förändringen kommer göra att målfunktionsvärdet minskar, är oförändrat eller ökar, samt bestäm storleken på förändringen i de fall målfunktionsvärdet kommer att minska eller öka. Om det inte är möjligt att bestämma exakt storlek på förändringen skall minsta möjliga intervall för förändringen istället anges. *Samtliga svar måste motiveras med hjälp av den utdata som finns på nästa sida.*

- Vinsten för produkt 1 minskar till 55kr/enhet (1p)
- Vinsten för produkt 4 ökar till 100kr/enhet (1p)
- Kontraktet som kräver att minst 30 enheter av produkt 3 tillverkas, omförhandlas till minst 20 enheter istället (1p)
- Ytterligare 600kg ny plast kan köpas in (2p)

CPLEX 11.0.1: sensitivity

CPLEX 11.0.1: optimal solution; objective 14120

3 dual simplex iterations (2 in phase I)

suffix up OUT;

suffix down OUT;

suffix current OUT;

z = 14120

: _varname _var _var.rc :=

1 x1 228 0

2 x2 0 -74

3 x3 30 0

4 x4 0 -29

5 y 500 0

;

: _varname _var.down _var.current _var.up :=

1 x1 50 65 1e+20

2 x2 -1e+20 56 130

3 x3 -1e+20 60 156

4 x4 -1e+20 75 104

5 y -6.5 -5 1e+20

;

: _conname _con.slack _con.dual :=

1 tillgang_ravara 0 6.5

2 tillgang_tid 42 0

3 inkop_ny_plast 0 1.5

4 prod_krav 0 -96

;

: _conname _con.down _con.current _con.up :=

1 tillgang_ravara 220 2500 2920

2 tillgang_tid 258 300 1e+20

3 inkop_ny_plast 0 500 920

4 prod_krav 0 30 125

;

(5p) Uppgift 3

Betrakta följande maximeringsproblem:

$$\max z = x_1 + x_2$$

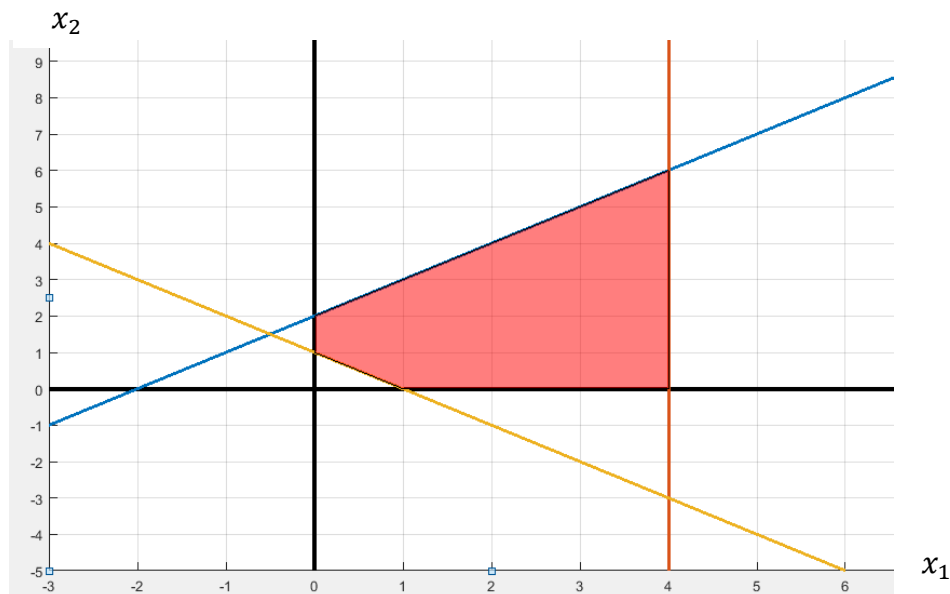
$$\text{då } -x_1 + x_2 \leq 2 \quad (\text{bvk1})$$

$$x_1 \leq 4 \quad (\text{bvk2})$$

$$x_1 + x_2 \geq 1 \quad (\text{bvk3})$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Det tillåtna området (gråmarkerat) är illustrerat i figuren nedan.



- a) Illustrera målfunktionen i figuren ovan och lös problemet grafiskt. Ange optimallösning och optimalt målfunktionsvärde. (1p)

Markera gärna i figuren, men riv i så fall loss denna sida från tentatesen och lämna in tillsammans med övriga lösningsblad. Var noga med att skriva sidnummer och AID-nummer överst på sidan.

- b) Motivera utifrån figuren ovan vilken/vilka av följande punkter

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad x^{(3)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^{(4)} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

som utgör

- 1) en tillåten lösning?
 - 2) en tillåten baslösning?
- (1p)

Fortsättning på nästa sida.

- c) För att lösa problemet med simplexmetoden krävs även att man läger till slackvariabler (med beteckning x_3, x_4, x_5) och formulerar problemet med endast likhetsvillkor:

$$\max z = x_1 + x_2$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 2 \quad (\text{bvk1})$$

$$x_1 + x_4 = 4 \quad (\text{bvk2})$$

$$x_1 + x_2 - x_5 = 1 \quad (\text{bvk3})$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

I en iteration av simplexmetoden är den aktuella lösning $x = (1, 0, 3, 3, 0)^T$ och efter val av inkommande och utgående basvariabel erhålls sökriktningen $s = (1, 0, 1, -1, 1)^T$ och steglängden $t = 3$.

- 1) Vad motsvarar detta för val av inkommande och utgående basvariabel?
 - 2) Vad blir den nya lösningen och hur har målfunktionsvärdet förändrats mellan de två lösningarna?
 - 3) Vad var den reducerade kostnaden för inkommande basvariabel?
- (3p)

(5p) Uppgift 4

Betrakta följande linjära optimeringsproblem

$$\max z = 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 3x_4$$

$$\text{då } x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 20$$

$$x_4 \geq 5$$

$$3x_1 + x_3 + x_4 = 10$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

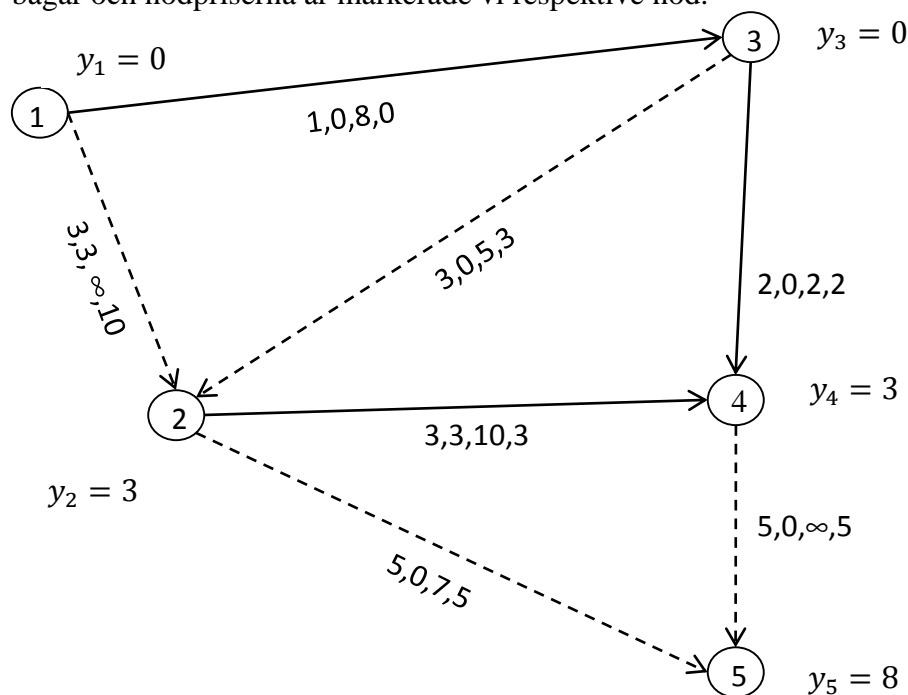
Problemet har lösts med simplex och den slutliga tablån återfinns nedan, där x_5 och x_6 är slackvariabler för respektive bivillkor.

	z	x1	x2	x3	x4	x5	x6	b
z	1	3	0	0	0	2	6	20
x4	0	0	0	0	1	0	-1	5
x2	0	-5	1	0	0	1	-1	5
x3	0	3	0	1	0	0	1	5

- Ange optimallösningen och optimalt målfunktionsvärde. (1p)
- Hur kan målfunktionskoefficienten framför x_1 förändras utan att optimallösningen förändras? (1p)
- Hur kan målfunktionskoefficienten framför x_2 förändras utan att optimallösningen förändras. (2p)
- Formulera dualen till optimeringsproblemet. (1p)

(5p) Uppgift 5

Betrakta nedanstående minikostnadsflödesnätverk. Nod 1 och 3 är källor med styrka 10 respektive 5, och nod 2 och nod 5 är sänkor med styrka 5 respektive 10. Varje båge är märkt med kostnad, undre gräns, övre gräns, samt aktuellt flöde. Bastrådet är utmärkt med streckade bågar och nodpriserna är markerade vid respektive nod.



- Visa att den aktuella lösningen är optimal (1p)
- Hur skulle målfunktionsvärdet förändras om den övre gränsen på båge (3,4) ökade med en enhet? (2p)
- Hur kan kostnaden på båge (3,2) förändras utan att optimallösningen förändras? (2p)