

TSKS10 Signaler, information & Kommunikation

Föreläsning 8

Avslutning kanalkodningssatsen

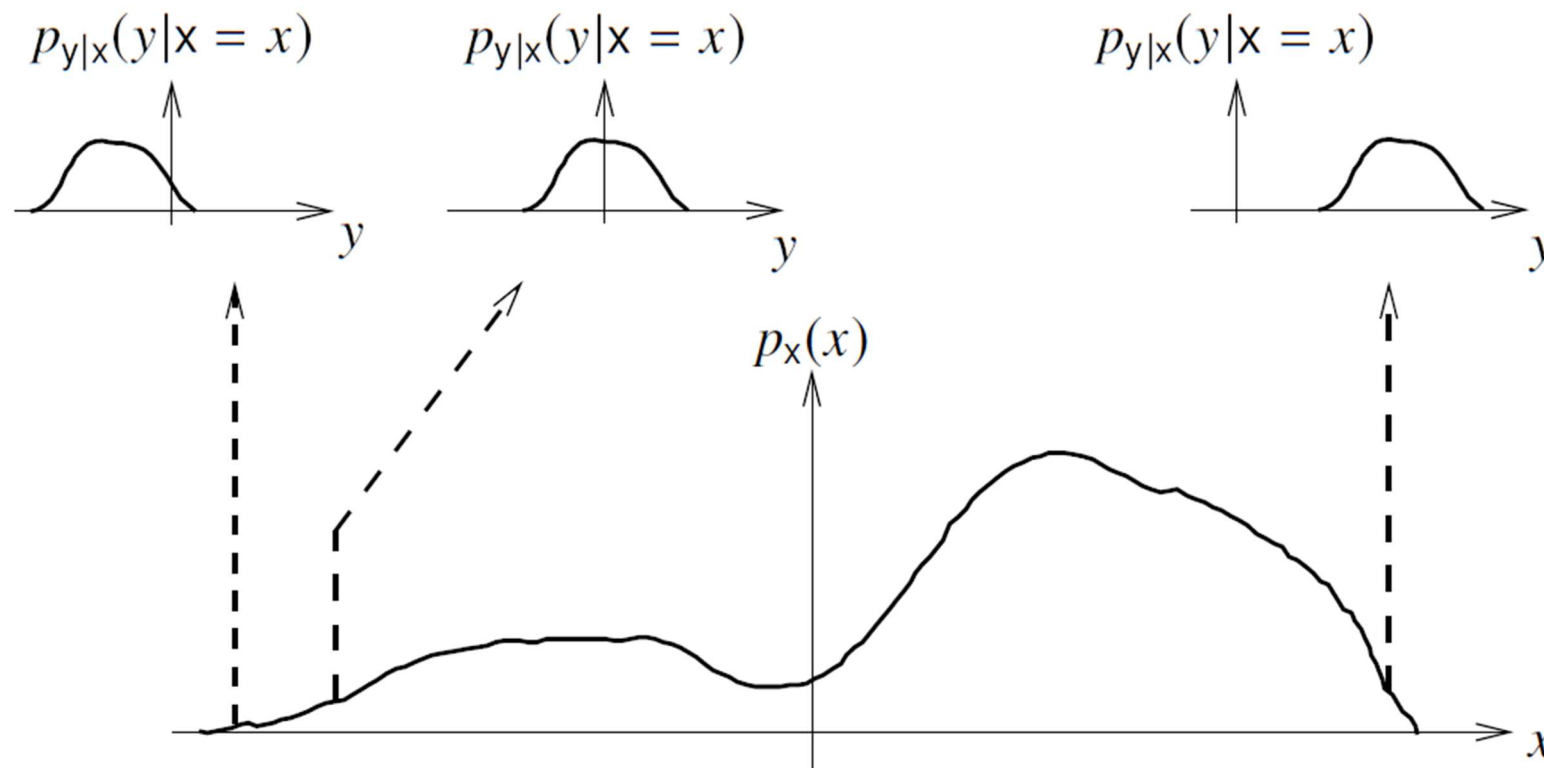
Vågformskanaler, specifikt kablar

Mikael Olofsson

Institutionen för Systemteknik (ISY)

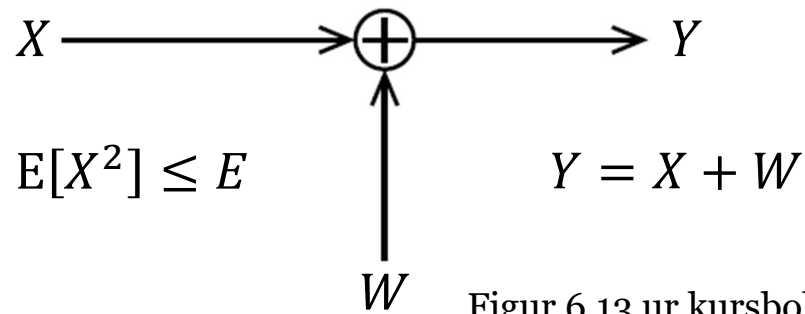
Ämnesområdet Kommunikationssystem

Kanal som är kontinuerlig in och kontinuerlig ut



Figur 6.12 ur kursboken

Additivt gaussiskt brus (AGN-kanal)



Figur 6.13 ur kursboken

Brusets täthetsfunktion

$$p_W(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-w^2/2\sigma^2}$$

Konsekutiva användningar är oberoende.

Täthetsfunktion för mottaget värde, betingat på sändt värde.

$$p_Y(y|X = x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-(y-x)^2/2\sigma^2}$$

Kanalkapacitet

$$C = \frac{1}{2} \log_2 \left(1 + \frac{E}{\sigma^2} \right)$$

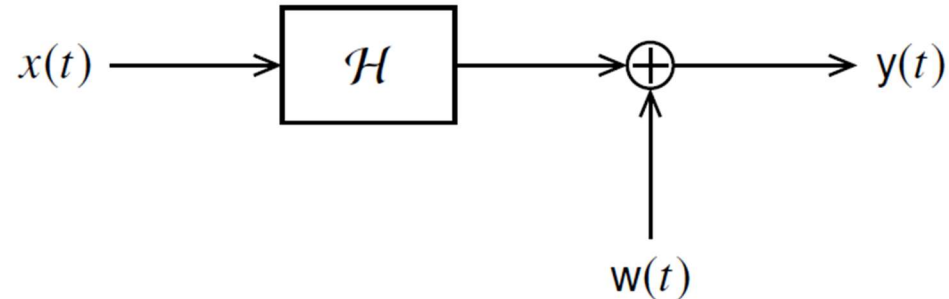
Enhet: Bitar per kanalanvändning (bpcu)

Detta maximum uppnås för

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{E}} e^{-x^2/2E}$$

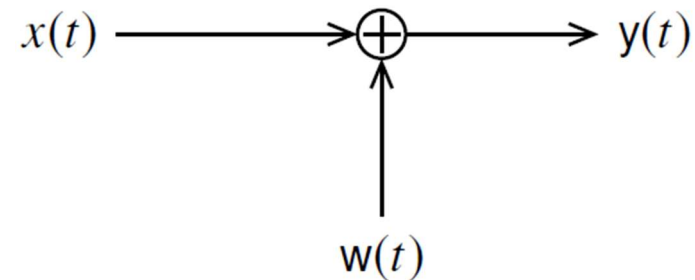
Vågformskanaler

Allmän vågformskanal:



Kanal som endast adderar brus:

Om $w(t)$ är vitt gaussiskt brus, så kallas den AWGN (Additive White Gaussian Noise)



B : Tillgänglig bandbredd

P : Mottagen medeleffekt i frekvensbandet.

$N_0/2$: Spektraltäthet, brusenergi per frihetsgrad.

BN_0 : Mottagen bruseffekt i frekvensbandet.

$2B$: Antal dimensioner per sekund.

Kanalkapacitet:

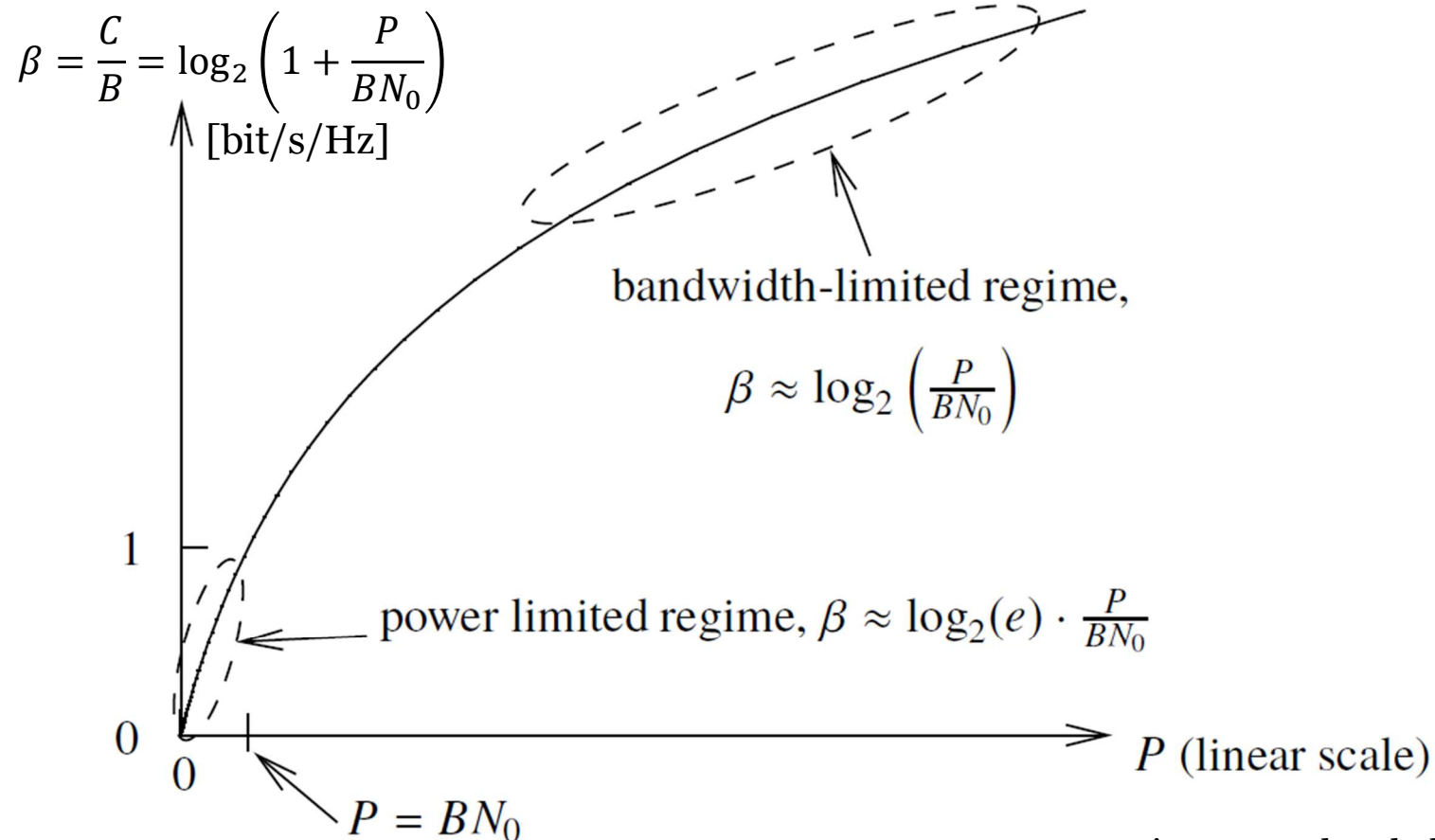
$$C = B \log_2 \left(1 + \frac{P}{BN_0} \right) \quad [\text{bit/s}]$$

Shannon-Hartleys formel.

Figur 1.4 ur kursboken

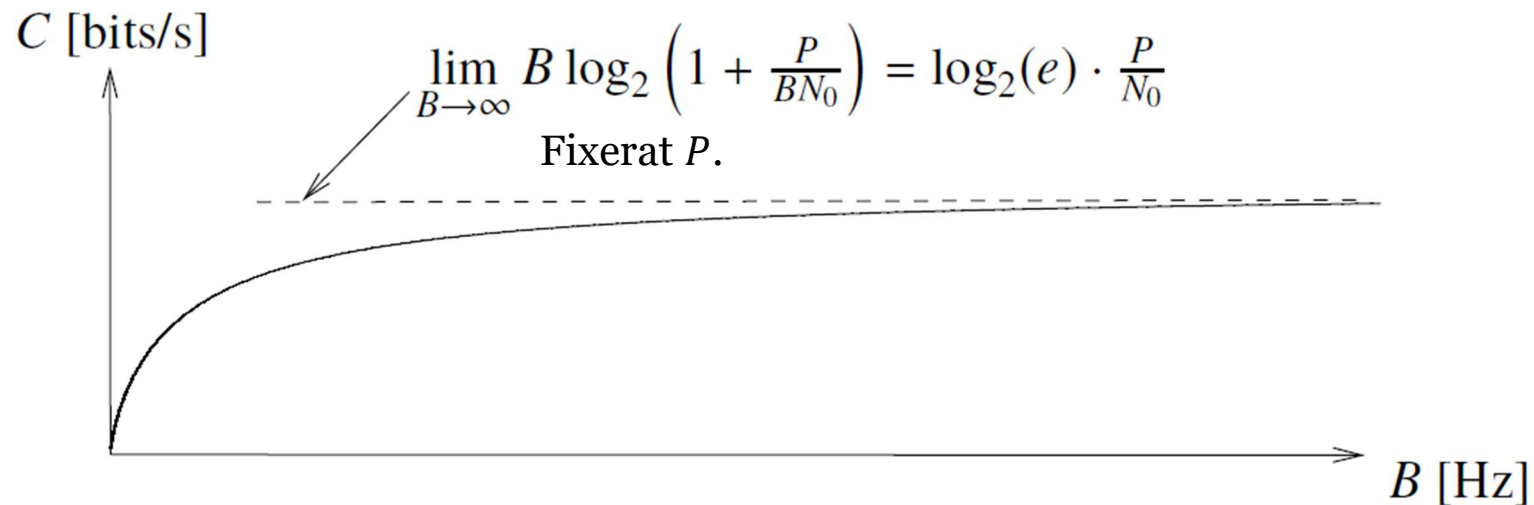
Arbetspunkter för AWGN-kanalen

– spektraleffektivitet β



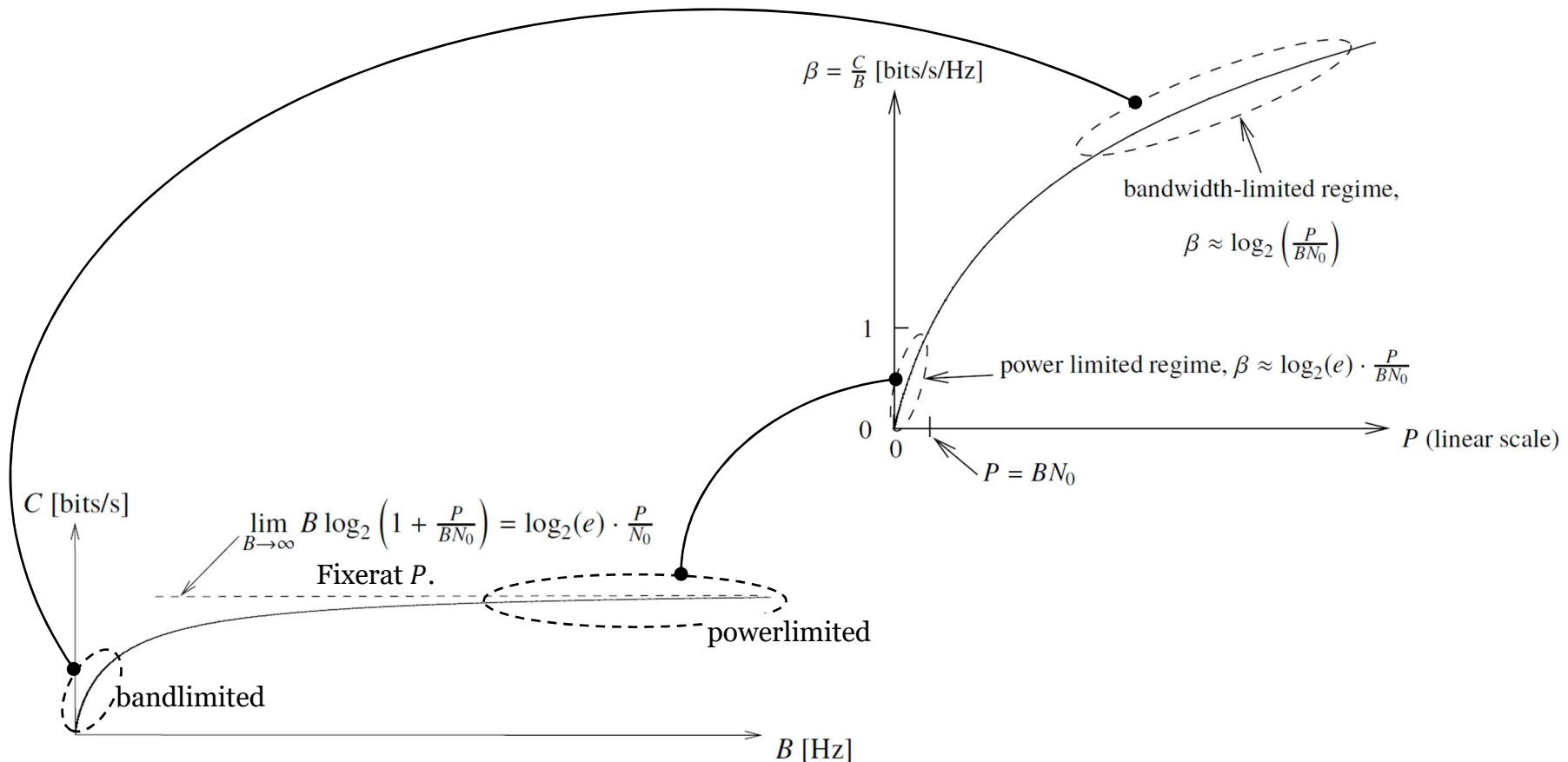
Figur 7.3 ur kursboken

Gränsen för bandbredds begränsning



Figur 7.4 ur kursboken

Gränsen för bandbredds begränsning relaterad till arbetspunkter

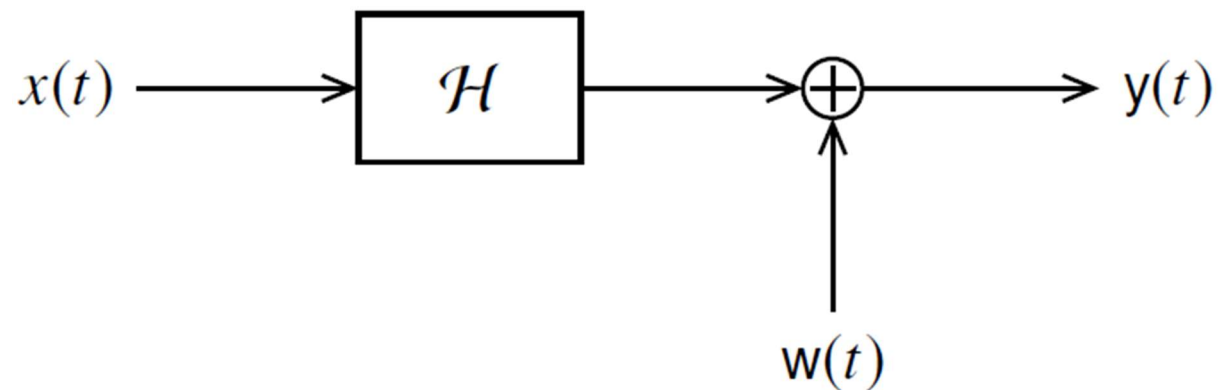


Figur 7.3 och 7.4 ur kursboken

Exempel på vågformskanaler

- Kabel (transmissionsledning)
- Trådlös länk (vanligen radio)
- Mikrovågsledare
- Optisk kanal, t.ex. fiber
- Akustisk kanal

Generell vågformskanal



Figur 1.4 ur kursboken

Egenskaper hos vågformskanaler

Bortsett bruset, är kanalen:

- Linjär? Normalt ja!
- Tidsinvariant? Ibland.

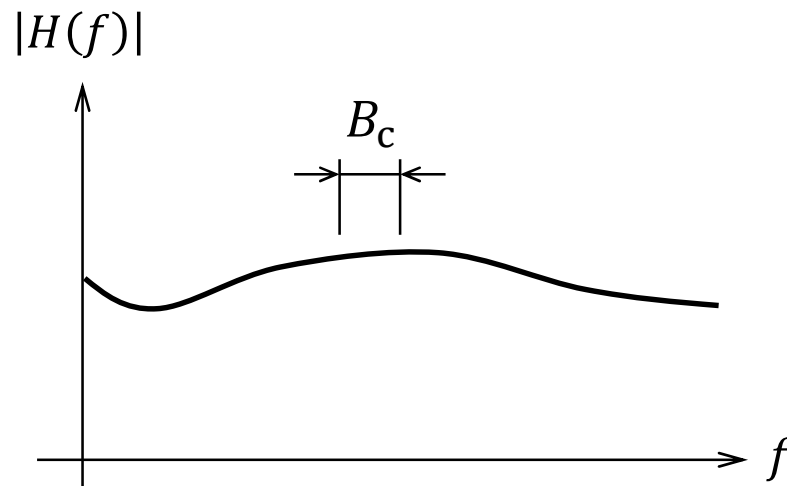
Om LTI, så beskrivs kanalen av impulssvar $h(t)$ och frekvenssvar $H(f)$.

Koherenstid (T_c):

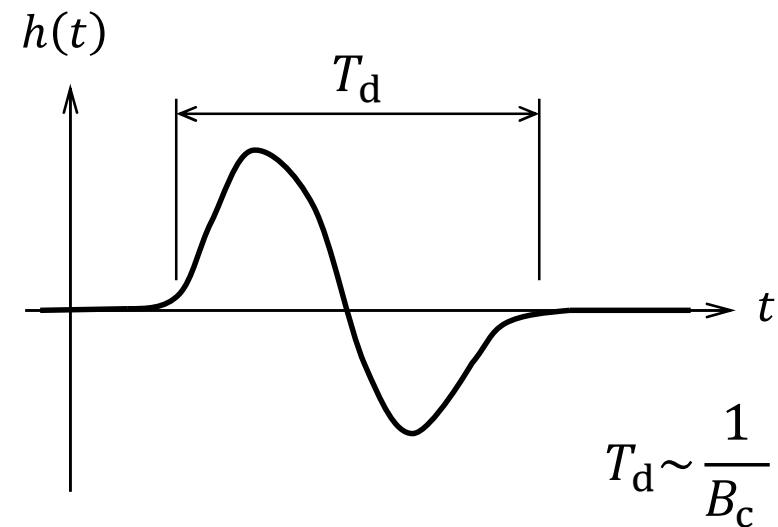
Tid under vilken kanalen kan betraktas som LTI.

Koherensbandbredd (B_c) och dispersion (T_d)

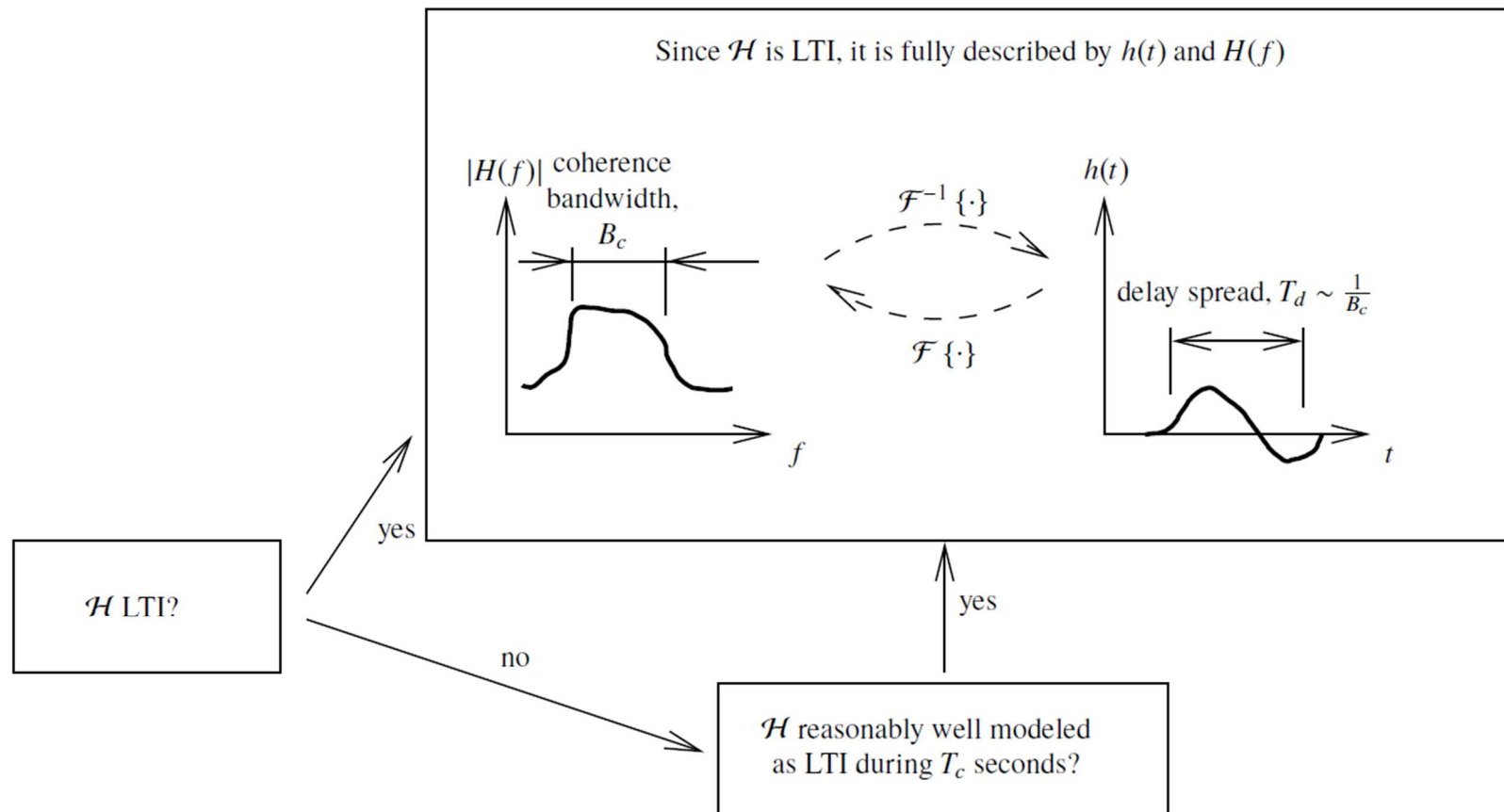
Koherensbandbredden B_c är bredden på ett frekvensband där $|H(f)|$ är väsentligen konstant och $\arg\{H(f)\}$ är väsentligen en rät linje.



Dispersion (delay spread) T_d är den väsentliga tidsutbredningen hos impulssvaret $h(t)$.

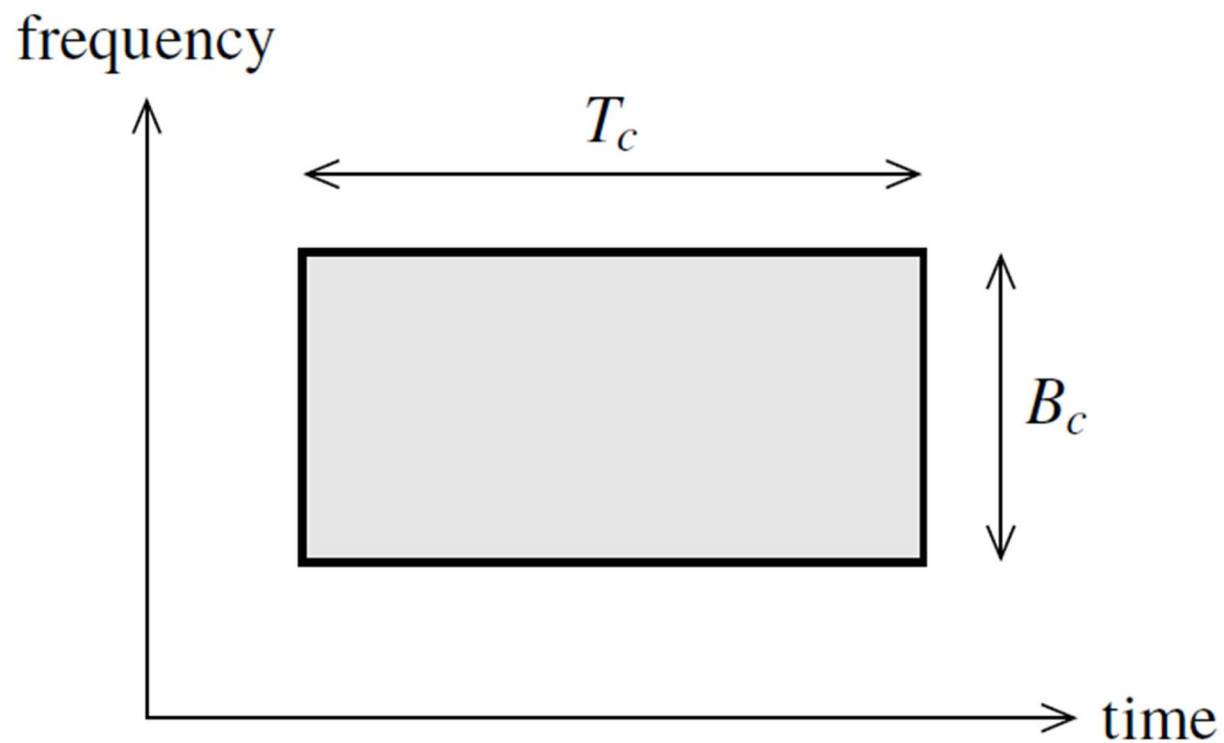


Relationen mellan koherensbandbredd B_c och dispersion T_d under koherenstiden T_c



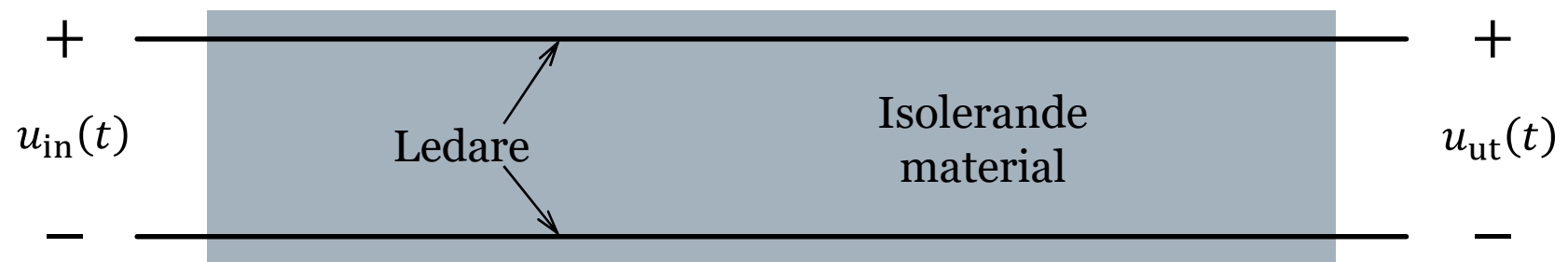
Figur 7.1 ur kursboken

Koherensintervall

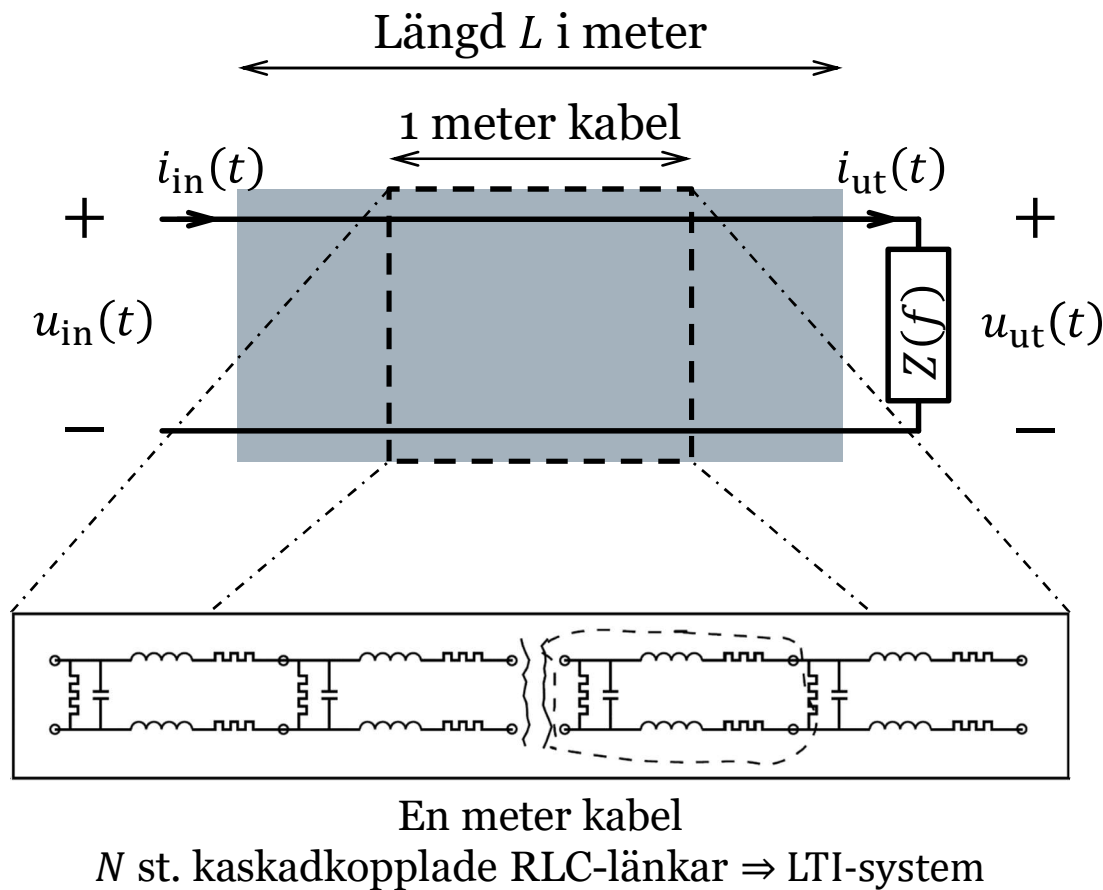


Figur 7.2 ur kursboken

En kabel



Modell av en kabel 1(6)



Delvis del av figur 8.1 ur kursboken

Insignalens spektrum:

$$U_{in}(f) = \mathcal{F}\{u_{in}(t)\}$$

$$I_{in}(f) = \mathcal{F}\{i_{in}(t)\}$$

Utsignalens spektrum:

$$U_{ut}(f) = \mathcal{F}\{u_{ut}(t)\}$$

$$I_{ut}(f) = \mathcal{F}\{i_{ut}(t)\}$$

Frekvenssvar:

$$H(f) = \frac{U_{ut}(f)}{U_{in}(f)}$$

Impulssvar:

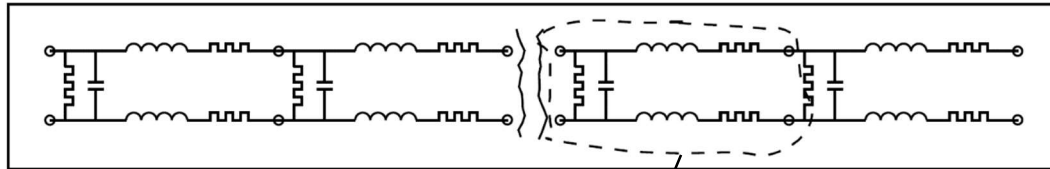
$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(f)\}$$

Utsignal:

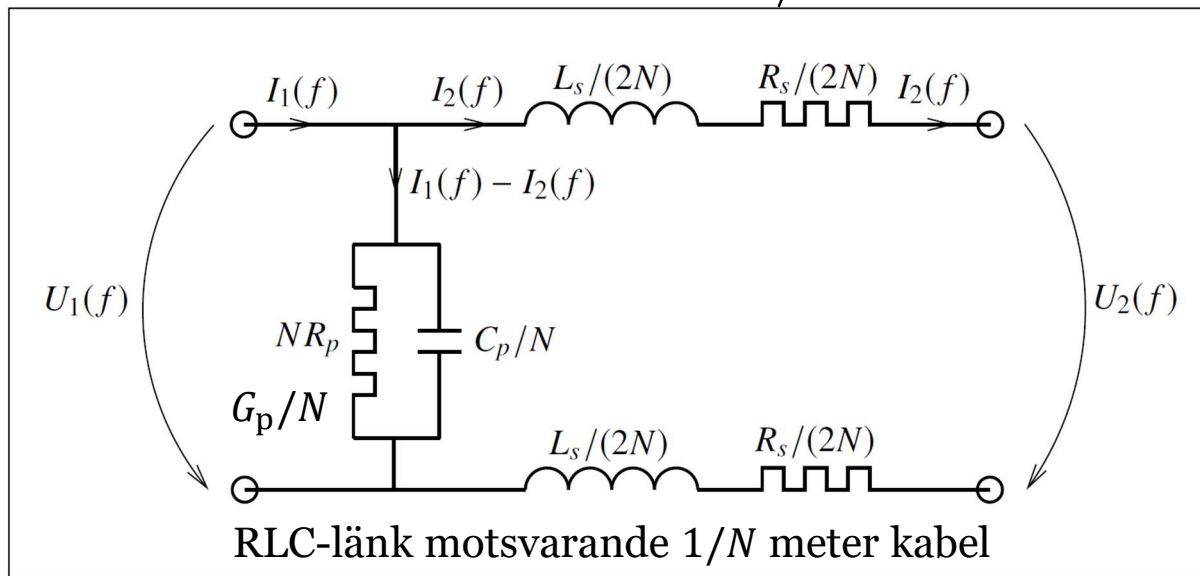
$$u_{ut}(t) = (u_{in} * h)(t)$$

Modell av en kabel 2(6)

En meter kabel



N st. kaskadkopplade
RLC-länkar, LTI-system



L : Kabelns längd

R_s : Serieresistans/m

L_s : Serieinduktans/m

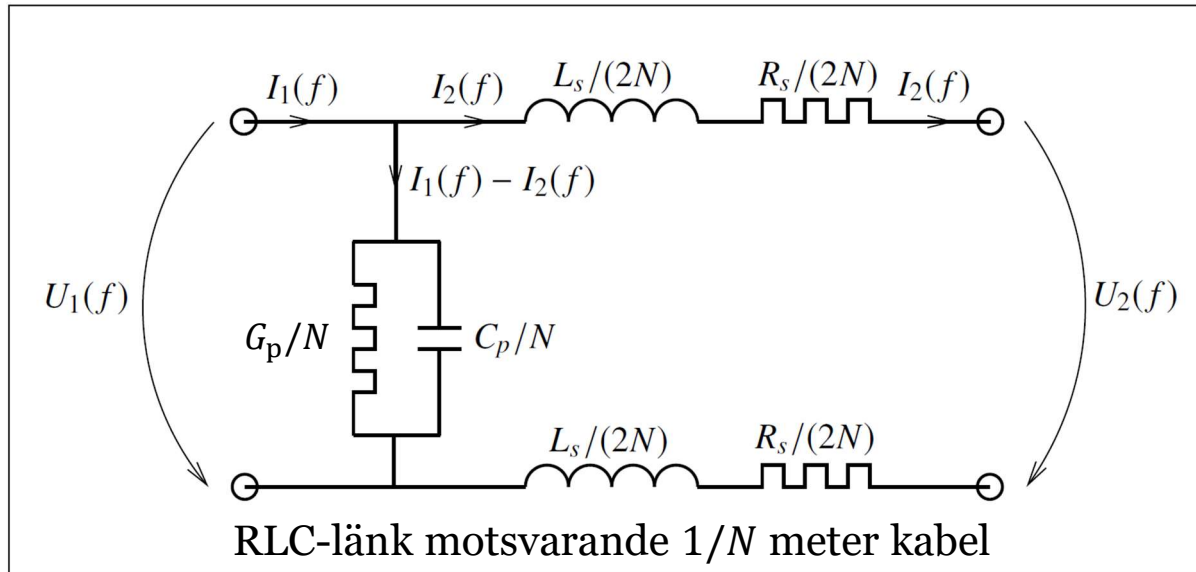
R_p : Parallellresistans i en
meter kabel

G_p : Parallellkonduktans/m
 $= 1/R_p$

C_p : Parallellkapacitans/m

Del av figur 8.1 ur kursboken

Modell av en kabel 3(6)



Del av figur 8.1 ur kursboken

L : Kabelns längd

R_s : Serieresistans/m

L_s : Serieinduktans/m

G_p : Parallellkonduktans/m

C_p : Parallellkapacitans/m

$$U_1 = U_2 + \frac{Z_s}{N} I_2$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{Y_p}{N} U_1 + I_2 = \\ &= \frac{Y_p}{N} U_2 + \left(1 + \frac{Y_p Z_s}{N^2} \right) I_2 \end{aligned}$$

Serieimpedans per meter: $Z_s(f) = R_s + j2\pi f L_s$

Parallelladmittans per meter: $Y_p(f) = G_p + j2\pi f C_p$

Serieimpedans per länk: $Z_s(f)/N$

Parallelladmittans per länk: $Y_p(f)/N$

Modell av en kabel 4(6)

$$U_1 = U_2 + \frac{Z_s}{N} I_2$$

$$I_1 = \frac{Y_p}{N} U_2 + \left(1 + \frac{Y_p Z_s}{N^2}\right) I_2$$

En länk på matrisform:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{Z_s}{N} \\ \frac{Y_p}{N} & 1 + \frac{Z_s Y_p}{N^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

Hela kabeln:

$$\begin{pmatrix} U_{in} \\ I_{in} \end{pmatrix} = \lim_{N \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 1 & \frac{Z_s}{N} \\ \frac{Y_p}{N} & 1 + \frac{Z_s Y_p}{N^2} \end{pmatrix}^{NL} \begin{pmatrix} U_{ut} \\ I_{ut} \end{pmatrix}$$

Sändarsidan:

$$U_{in} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{in} \\ I_{in} \end{pmatrix}$$

Mottagarsidan:

$$\begin{pmatrix} U_{ut} \\ I_{ut} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/Z \end{pmatrix} U_{ut}$$

Totalt:

$$U_{in} = \lim_{N \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{Z_s}{N} \\ \frac{Y_p}{N} & 1 + \frac{Z_s Y_p}{N^2} \end{pmatrix}^{NL}}_{\rightarrow H^{-1}(f), N \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/Z \end{pmatrix} U_{ut}$$

Modell av en kabel 5(6)

$$H^{-1}(f) = \lim_{N \rightarrow \infty} (1 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 & \frac{Z_s}{N} \\ \frac{Y_p}{N} & 1 + \frac{Z_s Y_p}{N^2} \end{pmatrix}^{NL} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/Z \end{pmatrix}$$

Kan visas: Då $N \rightarrow \infty$, så

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{Z_s}{N} \\ \frac{Y_p}{N} & 1 + \frac{Z_s Y_p}{N^2} \end{pmatrix}^{NL} \rightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{Z_s/Y_p} & \sqrt{Z_s/Y_p} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\sqrt{Z_s Y_p}} & 0 \\ 0 & e^{-\sqrt{Z_s Y_p}} \end{pmatrix}^L \begin{pmatrix} \sqrt{Y_p/Z_s} & 1 \\ \sqrt{Y_p/Z_s} & -1 \end{pmatrix}$$

Slutligen:

$$H(f) = \frac{2}{\left(1 - \sqrt{\frac{Z_s}{Y_p}} \cdot \frac{1}{Z}\right) e^{-\sqrt{Z_s Y_p} \cdot L} + \left(1 + \sqrt{\frac{Z_s}{Y_p}} \cdot \frac{1}{Z}\right) e^{\sqrt{Z_s Y_p} \cdot L}}$$

Vilken rot? Den med positiv realdel: $\sqrt{A} = \sqrt{|A|} e^{j \arg\{A\}} = \sqrt{|A|} e^{j \ar\{A\}/2}$

Argument: $-\pi \leq \arg\{A\} < \pi$

Modell av en kabel 6(6)

$$H(f) = \frac{2}{\left(1 - \sqrt{\frac{Z_s}{Y_p}} \cdot \frac{1}{Z}\right) e^{-\sqrt{Z_s Y_p} \cdot L} + \left(1 + \sqrt{\frac{Z_s}{Y_p}} \cdot \frac{1}{Z}\right) e^{\sqrt{Z_s Y_p} \cdot L}}$$

Karakteristisk
impedans:

$$Z_c = \sqrt{\frac{Z_s}{Y_p}}$$

$\Rightarrow$

$$H(f) = \frac{2}{\left(1 - \frac{Z_c}{Z}\right) e^{-\sqrt{Z_s Y_p} \cdot L} + \left(1 + \frac{Z_c}{Z}\right) e^{\sqrt{Z_s Y_p} \cdot L}}$$

Om L är stor ($\gg 1/\operatorname{Re}\{\sqrt{Z_s Y_p}\}$):

$$H(f) \approx \frac{2}{\left(1 + \frac{Z_c}{Z}\right) e^{\sqrt{Z_s Y_p} \cdot L}} = \frac{2}{\left(1 + \frac{Z_c}{Z}\right)} e^{-\sqrt{Z_s Y_p} \cdot L}$$

Om L är liten ($\ll 1/|\sqrt{Z_s Y_p}|$):

$$H(f) \approx \frac{2}{\left(1 - \frac{Z_c}{Z}\right) + \left(1 + \frac{Z_c}{Z}\right)} = \frac{2}{2} = 1$$

Matchad last

$$H(f) = \frac{2}{\left(1 - \frac{Z_c}{Z}\right) e^{-\sqrt{Z_s Y_p} \cdot L} + \left(1 + \frac{Z_c}{Z}\right) e^{\sqrt{Z_s Y_p} \cdot L}}$$

Matchad last: $Z = Z_c \quad \Rightarrow \quad H(f) = \frac{2}{2e^{\sqrt{Z_s Y_p} \cdot L}} = e^{-\sqrt{Z_s Y_p} \cdot L}$

Om $\arg\{Z_s\} = \arg\{Y_p\}$:

$$R_s/G_p = L_s/C_p$$

Z_c reell, oberoende av f .

$$H(f) = e^{-\sqrt{R_s G_p} \cdot L} \cdot e^{-j2\pi f \sqrt{L_s C_p} \cdot L}$$

$$h(t) = \underbrace{e^{-\sqrt{R_s G_p} \cdot L}}_{\text{Exponentiellt fallande amplitud}} \cdot \delta\left(t - \underbrace{\sqrt{L_s C_p} \cdot L}_{\text{Linjär fördröjning}}\right)$$

Signalens hastighet längs kabeln:

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_s C_p}}$$

Koaxialkabel med matchad last

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_s C_p}}$$

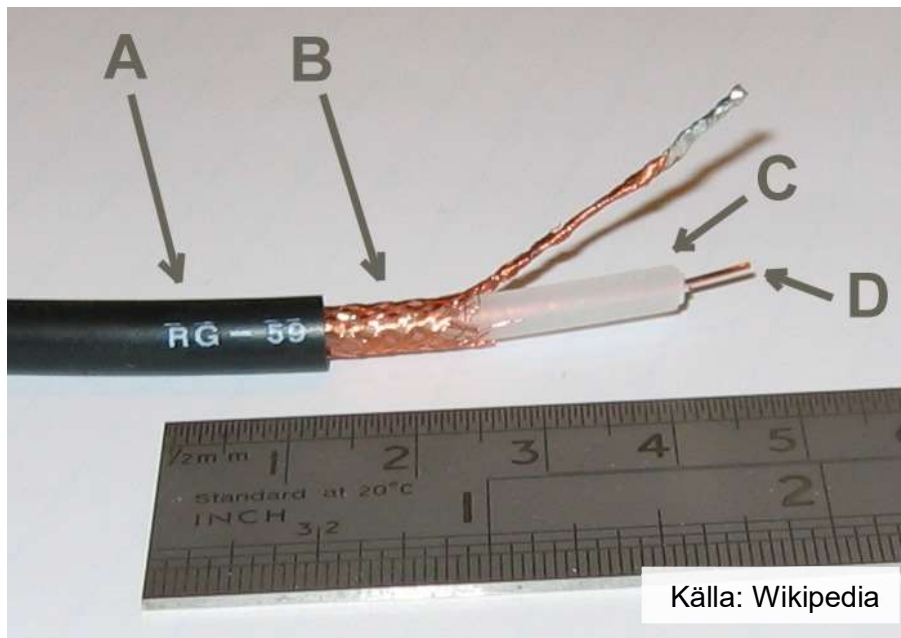
$$L_s C_p = \mu \epsilon$$

Permeabilitet resp. permittivitet
för isolationsmaterialet

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_s C_p}} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \leq \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c$$

Ljusets hastighet
i vakuum.

Permeabilitet resp. permittivitet
för vakuum



$$\mu = \mu_r \mu_0 \quad \mu_r \geq 1$$

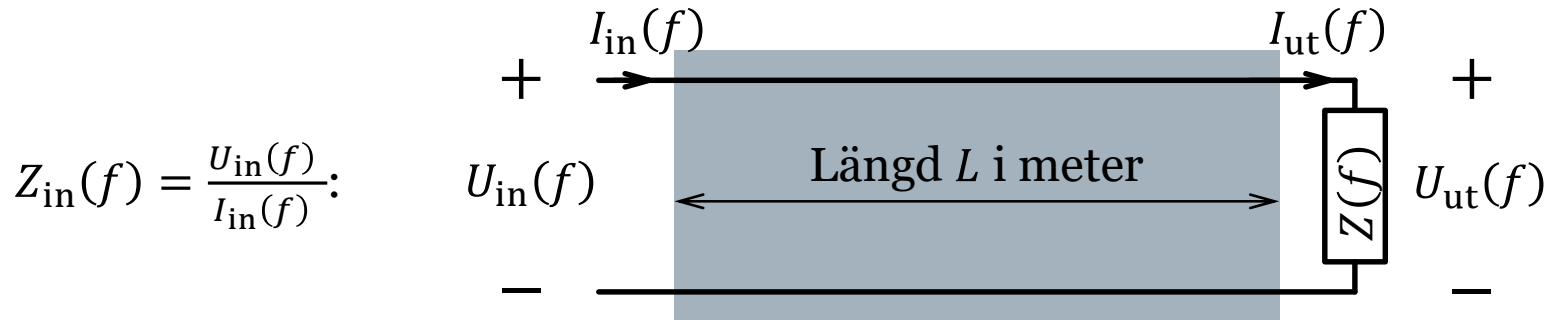
$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 \quad \epsilon_r \geq 1$$

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}$$

Normalt: $v \approx \frac{2}{3} c$

Inimpedans

$$\begin{pmatrix} U_{in} \\ I_{in} \end{pmatrix} = \lim_{N \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 1 & \frac{Z_s}{N} \\ \frac{Y_p}{N} & 1 + \frac{Z_s Y_p}{N^2} \end{pmatrix}^{NL} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/Z \end{pmatrix} U_{ut} \quad Z_c = \sqrt{Z_s/Y_p}$$



$$Z_{in} = \frac{\lim_{N \rightarrow \infty} (1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & \frac{Z_s}{N} \\ \frac{Y_p}{N} & 1 + \frac{Z_s Y_p}{N^2} \end{pmatrix}^{NL} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/Z \end{pmatrix} U_{ut}}{\lim_{N \rightarrow \infty} (0 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & \frac{Z_s}{N} \\ \frac{Y_p}{N} & 1 + \frac{Z_s Y_p}{N^2} \end{pmatrix}^{NL} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/Z \end{pmatrix} U_{ut}} = \frac{(1 \ 0) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{Z_s/Y_p} & \sqrt{Z_s/Y_p} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\sqrt{Z_s Y_p}} & 0 \\ 0 & e^{-\sqrt{Z_s Y_p}} \end{pmatrix}^L \begin{pmatrix} \sqrt{Y_p/Z_s} & 1 \\ \sqrt{Y_p/Z_s} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/Z \end{pmatrix}}{(0 \ 1) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{Z_s/Y_p} & \sqrt{Z_s/Y_p} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\sqrt{Z_s Y_p}} & 0 \\ 0 & e^{-\sqrt{Z_s Y_p}} \end{pmatrix}^L \begin{pmatrix} \sqrt{Y_p/Z_s} & 1 \\ \sqrt{Y_p/Z_s} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/Z \end{pmatrix}}$$

$$= Z_c \frac{\frac{1}{Z_c} \left(e^{\sqrt{Z_s Y_p} \cdot L} + e^{-\sqrt{Z_s Y_p} \cdot L} \right) + \frac{1}{Z} \left(e^{\sqrt{Z_s Y_p} \cdot L} - e^{-\sqrt{Z_s Y_p} \cdot L} \right)}{\frac{1}{Z_c} \left(e^{\sqrt{Z_s Y_p} \cdot L} - e^{-\sqrt{Z_s Y_p} \cdot L} \right) + \frac{1}{Z} \left(e^{\sqrt{Z_s Y_p} \cdot L} + e^{-\sqrt{Z_s Y_p} \cdot L} \right)}$$

Om $Z = Z_c$:

$$Z_{in} = Z_c \frac{2e^{\sqrt{Z_s Y_p} \cdot L} / Z_c}{2e^{\sqrt{Z_s Y_p} \cdot L} / Z_c} = Z_c$$

Lärdomar om kablar

- Terminera (belasta) alltid kablar med en impedans som är lika med kabelns karakteristiska impedans (matchad last).
- Om du behöver skarva en kabel, använd en kabel med samma karakteristiska impedans.
- En kabel är kort om den är mycket kortare än våglängden för den högsta intressanta frekvensen.
- Signalen färdas med ungefär hastighet $2 \cdot 10^8$ m/s.
- Om möjligt, använd kablar med reell karakteristisk impedans.
- Parametrarna för en kabel är frekvensberoende $\Rightarrow$ LP-karaktär.
- Använd inte frekvenser över kabelns angivna gränsfrekvens.

Mikael Olofsson
ISY/CommSys

www.liu.se