

TSKS21 Signaler, information & bilder

Föreläsning 5

Signaler och system – tidsdomänen

Mikael Olofsson

Institutionen för Systemteknik (ISY)

Ämnesområdet Elektroniska kretsar och system

Faltning

Faltningen av signalerna $a(t)$ och $b(t)$:
$$(a * b)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\tau)b(t - \tau)d\tau$$

Egenskaper:

Bilinjär: Fixera en av dem, linjär m.a.p. den andra.

Kommutativ: $(a * b)(t) = (b * a)(t)$

Associativ: $((a * b) * c)(t) = (a * (b * c))(t)$

Konvergens: Om $\int_{-\infty}^{\infty} |a(t)| dt$ är konvergent och $b(t)$ ändlig.
...eller tvärt om.

Utsignal från ett LTI-system



$$y(t) = H\{x(t)\} = H\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right\}$$

Linjäritet:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)H\{\delta(t-\tau)\}d\tau$$

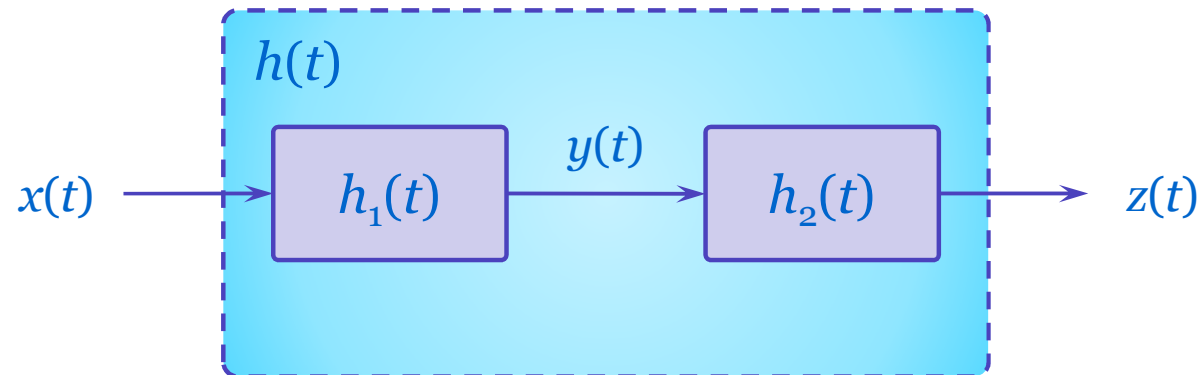
Tidsinvarians:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = (x * h)(t)$$

Stegsvar:

$$g(t) = (u * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^t h(\tau)d\tau$$

Kaskadkopplade LTI-system



Ett system bestående av LTI-system är ett LTI-system.

$$\begin{aligned} y(t) &= (x * h_1)(t) \\ z(t) &= (y * h_2)(t) \end{aligned} \quad \begin{array}{c} \text{associativitet} \\ \downarrow \end{array} \quad \begin{aligned} &= ((x * h_1) * h_2)(t) \\ &= (x * (h_1 * h_2))(t) \end{aligned}$$

$$\text{Identifiera i } z(t) = (x * h)(t) \quad \Rightarrow \quad h(t) = (h_1 * h_2)(t)$$

Kausala system

– Känner inte till framtiden

Ett system är **kausalt** om dess utsignal inte beror på framtida värden hos insignalen. Detta ska gälla för alla insignaler och alla tidpunkter.

Exempel på kausala system:

$$\left. \begin{aligned} y(t) &= x(t)\cos(\omega t) \\ y(t) &= x^2(t)\cos(\omega t) \end{aligned} \right\} \text{ – även momentana}$$

$$\left. \begin{aligned} y(t) &= x(t-3) \\ y(t) &= x^2(t-3) \\ y(t) &= \int_{t-1}^t x(\tau) d\tau \end{aligned} \right\} \text{ – även dynamiska}$$

Antikausala system

– Känner inte till historien

Ett system är **antikausalt** om dess utsignal inte beror på historiska värden hos insignalen. Detta ska gälla för alla insignaler och alla tidpunkter.

Exempel på antikausala system:

$$\left. \begin{aligned} y(t) &= x(t)\cos(\omega t) \\ y(t) &= x^2(t)\cos(\omega t) \end{aligned} \right\} \text{ – även momentana}$$

$$\left. \begin{aligned} y(t) &= x(t+3) \\ y(t) &= x^2(t+3) \\ y(t) &= \int_t^{t+1} x(\tau) d\tau \end{aligned} \right\} \text{ – även dynamiska}$$

Allmänt ickekausala system

- Känner både till historien och framtiden

Ett system som varken är kausalt eller antikausalt kallas **allmänt ickekausalt**.

Allmänt ickekausala system är dynamiska.

Exempel på allmänt ickekausala system :

$$y(t) = x(t+3) + x(t-3)$$

$$y(t) = x^2(t+3) - x(t-3)$$

$$y(t) = \frac{1}{2} \int_{t-1}^{t+1} x(\tau) d\tau$$

Stabila system

– uppför sig på ett kontrollerat sätt

Ett system kallas **stabilt** (BIBO-stabilt) om en ändlig insignal resulterar i en ändlig utsignal. Detta ska gälla för alla ändliga insignaler och alla tidpunkter.

$$\|x(t)\| < M \quad \forall t \quad \Rightarrow \quad \|y(t)\| < N \quad \forall t$$

Exempel stabilt:

$$y(t) = x(t-3) \quad y(t) = x(-t)$$

$$y(t) = x^2(t) \quad y(t) = x(t^2)$$

$$y(t) = x(t) \cos(\omega t)$$

Exempel ickestabilt:

$$y(t) = \frac{d}{dt} x(t) \quad y(t) = 1/x(t)$$

$$y(t) = t x(t)$$

Marginellt stabilt

- ett specialfall av ickestabilt

Ickestabila system kan delas in i två typer – strikt ickestabila och marginellt stabila. Ett **marginellt stabilt** system uppför sig som om det vore stabilt för vissa begränsade insignaler, men inte för andra.

Exempel marginellt stabila system:

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

$$y(t) = \frac{d}{dt} x(t)$$

Kausalitet och stabilitet för LTI-system

Ett LTI-system är fullständigt beskrivet av sitt impulssvar.

$$\text{Kausalitet} \quad \Leftrightarrow \quad h(t) = 0, \quad t < 0 \quad \Leftrightarrow \quad g(t) = 0, \quad t < 0$$

$$\text{Antikausalitet} \quad \Leftrightarrow \quad h(t) = 0, \quad t > 0$$

$$\text{Stabilitet} \quad \Leftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt \text{ konvergent (absolutintegrerbart)}$$

$$\begin{aligned} \text{Marginell stabilitet} \quad &\Leftrightarrow \quad |h(t)| < M \text{ (ändlig)} \\ &\text{och} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt \text{ ickekonvergent} \end{aligned}$$

Sinus in – sinus ut - principen

För LTI-system har vi:

Sinus in – Sinus ut (samma frekvens)

Jämför med partikulärlösningen av en differentialekvation.

Också: $j\omega$ -metoden.

Linjäritet implicerar:

$$\sum \text{Sinus in} - \sum \text{Sinus ut}$$

Önskvärt:

Beskriv signaler i termer av sinussignaler.

Beskriv system i termer av vad de gör med sinussignaler.

Detta tar oss till: Fourierserier och Fouriertransformer

Mikael Olofsson
ISY/KS

www.liu.se