

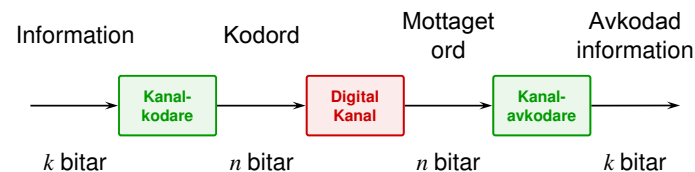
TSKS21 Signaler, information & bilder

Föreläsning 11

Informationsteori – kanalkodning 1

Mikael Olofsson
 Institutionen för Systemteknik (ISY)
 Ämnesområdet Kommunikationssystem

Block-koder – Grundidé



Beräkna r paritetsbitar från k informationsbitar.

Skicka $n = k + r$ kodordsbitar.

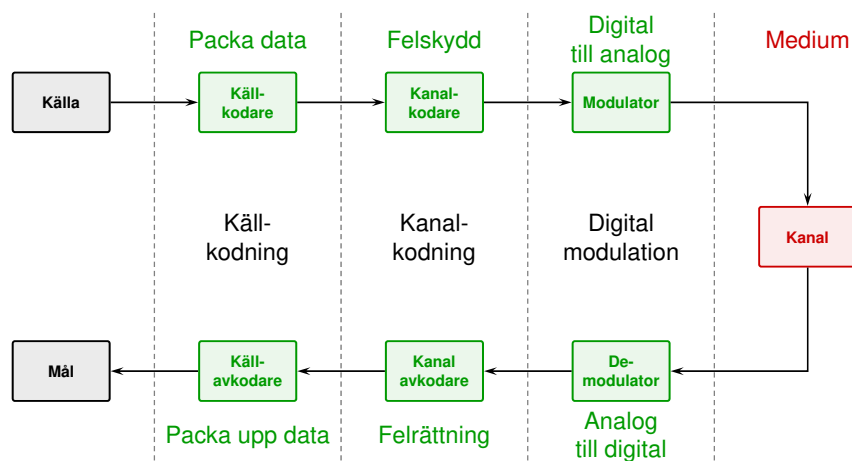
Mottaget: n eventuellt felaktiga bitar.

Avkoda till det mest troliga sända kodordet givet de mottagna bitarna.

Mer generellt:
 Avbilda k informationsbitar
 på $n = k + r$ kodordsbitar.

Om kodorden är välvalda, då kommer vi att kunna korrigera fel.

Ett envägstelekomunikationssystem



Block-kod – Mängd av binära vektorer

Kod: $\mathcal{C} = \{\bar{c}_i \in \{0,1\}^n\}_{i=1}^{2^k}$

Kodord: $\bar{c}_i = (c_{i,1}, \dots, c_{i,n}) \in \{0,1\}^n$

Takt: $R = \frac{k}{n}$

Example code:

Information	Codeword
00	10101010
01	11010000
10	01100111
11	00011101
$k = 2$	$n = 8$

Principer för avkodning:

Anta att alla fel är lika allvarliga. \Rightarrow

Välj det mest troliga kodordet givet den mottagna vektorn.

Avkodning

Stokastiska variabler: Sämt kodord: \bar{C}
 Mottaget ord: \bar{X}

MAP-avkodning (Maximim Å-Posteriori):

Avkodningsregel 1: Sätt $\hat{c} = \bar{c}_i$ om $\Pr\{\bar{C} = \bar{c}_k | \bar{X} = \bar{x}\}$ maximeras för $k = i$.

Bayes regel \Rightarrow

Avkodningsregel 2: Sätt $\hat{c} = \bar{c}_i$ om $\Pr\{\bar{C} = \bar{c}_k\} \Pr\{\bar{X} = \bar{x} | \bar{C} = \bar{c}_k\}$ max för $k = i$.

ML-avkodning ($\Pr\{\bar{C} = \bar{c}_k\} = 1/2^k$) (Maximum Likelihood):

Avkodningsregel 3: Sätt $\hat{c} = \bar{c}_i$ om $\Pr\{\bar{X} = \bar{x} | \bar{C} = \bar{c}_k\}$ maximeras för $k = i$.

Exempel på avkodning

Information	Kodord	
00	10101010	$d_H(10101010, 11010000) = 5$ $d_H(10101010, 01100111) = 5$ $d_H(10101010, 00011101) = 6$ $d_H(11010000, 01100111) = 6$ $d_H(11010000, 00011101) = 5$ $d_H(01100111, 00011101) = 5$
01	11010000	
10	01100111	
11	00011101	

$k = 2$ $n = 8$

} Minavstånd $d = 5$

Avkodning: Välj närmaste kodord

(10111010) avkodas till (10101010)
 (11110111) avkodas till (01100111)
 (00111000) är på avstånd 3 från både
 (10101010) & (00011101)

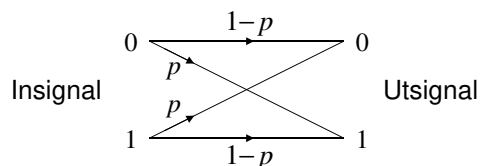
Felrättningsförmåga

$$t = \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor \quad \text{Här } t=2$$

Feldetekteringsförmåga

$$v = d-1 \quad \text{Här } v=4$$

Binärsymmetriska kanaler (BSC)



Konsekutiva användningar av kanalen är oberoende.

Hammingavstånd: $d_H(\bar{a}, \bar{b})$ # positioner där \bar{a} och \bar{b} är olika.

Egenskaper: $d_H(\bar{a}, \bar{a}) = 0$ $d_H(\bar{a}, \bar{b}) \geq 0$ $d_H(\bar{a}, \bar{c}) \leq d_H(\bar{a}, \bar{b}) + d_H(\bar{b}, \bar{c})$

Då får vi: $\Pr\{\bar{X} = \bar{x} | \bar{C} = \bar{c}_k\} = p^{d_H(\bar{x}, \bar{c}_k)} (1-p)^{n-d_H(\bar{x}, \bar{c}_k)}$

ML-avkodning för BSC med felsannolikhet p (vi antar $0 < p < 0.5$):

Avkodningsregel 4: Sätt $\hat{c} = \bar{c}_i$ om $d_H(\bar{x}, \bar{c}_k)$ minimeras för $k = i$.

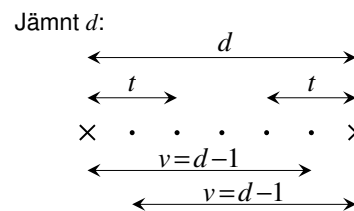
Förmåga att rätta och detektera fel

Felrättningsförmåga: $t = \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$

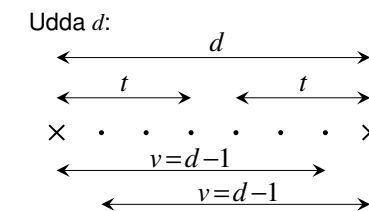
Koden kan rätta varje w -bitars fel om $w \leq t$.

Feldetekteringsförmåga: $v = d-1$

Koden kan detektera varjor w -bitars fel om $w \leq v$.

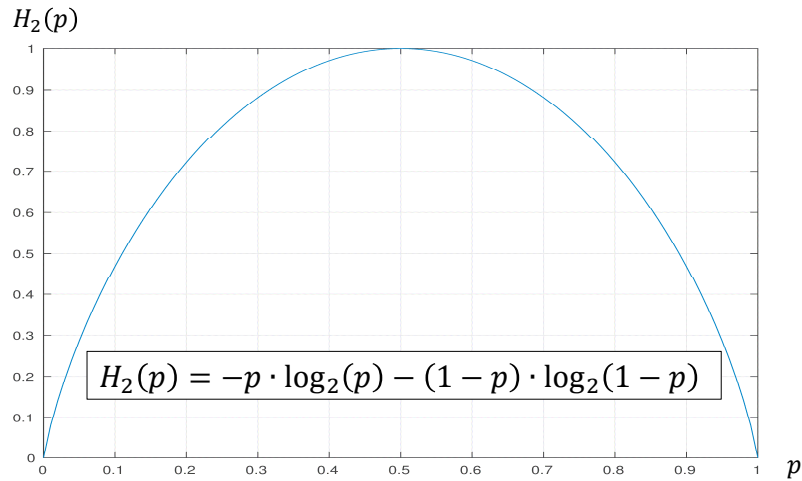


$$t = \frac{d-2}{2}$$

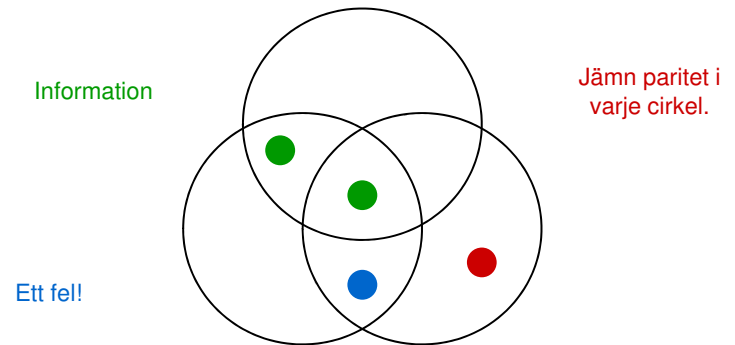


$$t = \frac{d-1}{2}$$

Binära entropifunktionen



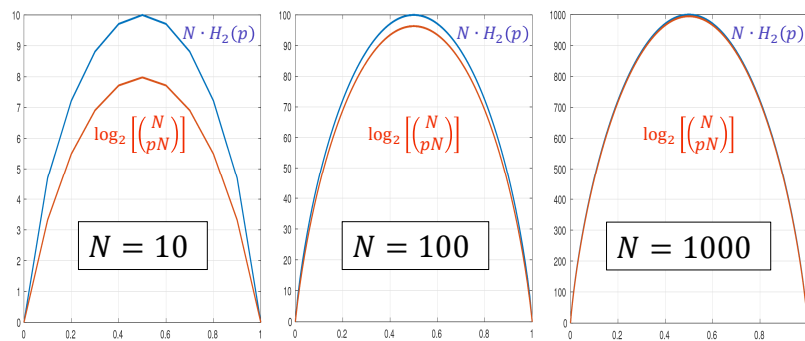
Hamming-[7,4]-koden – Exempel



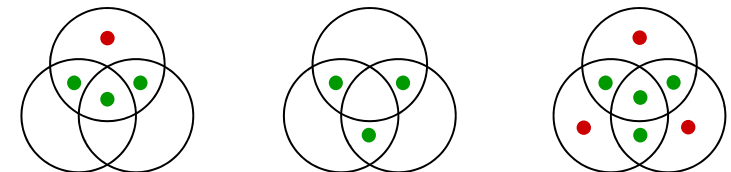
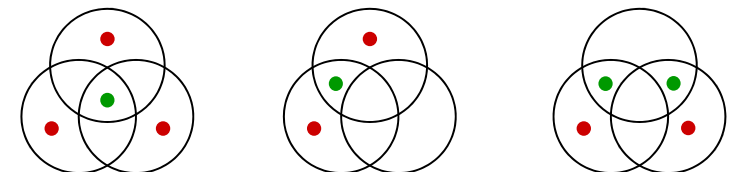
Resultat: Jämn paritet i den övre cirkeln, udda paritet i de andra två cirkelarna. Endast en position kan förklara det – det faktiska felet.

Användbar approximation

$$\log_2 \left[\binom{N}{pN} \right] \approx N \cdot H_2(p)$$



Hamming-[7,4]-koden – Fler exempel



Mikael Olofsson
ISY/KS

www.liu.se