TNA001 FÖ 5 Kap 1.6 (fr.o.m. sid. 43) Induktionsbevis

a) Fakultet och binomialkoefficienter

För alla heltal $n > 0$ definieras **n-fakultet** enligt

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n.$$

Vi får t. ex.

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, \qquad 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 \qquad (\text{alt. } 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120).$$

Dessutom gäller att

$$0! = 1.$$

Talen $\binom{n}{k}$ ("n över k") kallas **binomialkoefficienter** och ges av

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \text{för } n \geq 0 \text{ och } k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Vi får t.ex

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4!}{3!1!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = 4$$

samt

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{7!}{2!5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 21 \text{ och } \binom{7}{5} = \frac{7!}{5!(7-5)!} = \frac{7!}{5!2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 21$$

där vi ser att $\binom{7}{2} = \binom{7}{5}$, vilket illustrerar sambandet $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ för $0 \leq k \leq n$ (1.38).

Dessutom gäller

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{och} \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \quad (1.37).$$

För binomialutveckling av binom, t.ex. $(a+b)^5$, används **binomialsatsen** (binomialformeln) som ges av

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

för alla $n \in \mathbb{N}$.

- **Pascals triangel** (med symmetriegenskaper)

Exempel 27

a) $(x+1)^5 =$

b) $(x-2)^5 =$

c) $(2x-y)^4 =$

Exempel 28

Bestäm koefficienten för x^3 i utvecklingen av $(2x-1)^7$.

Induktionsbevis

- Induktionsbevis illustreras via **Exempel 29** nedan.
- Bevis av summaformeln för aritmetisk summa med hjälp av ett induktionsbevis (**Exempel 30**).
- Exempel på en olikhet som bevisas med induktion: $(x+1)^n \geq 1+nx$, $n \in \mathbb{Z}^+, x \geq 0$ (**Exempel 31**).

Det förekommer då och då att man härleder satser med hjälp av s.k. *induktion*. I princip går man till väga så här: Man har en följd påståenden $P(n_0)$, $P(n_0+1)$, ... och man vill visa att $P(n)$ är sant för alla *heltal* $n \geq n_0$.

Beviset sker i **tre** STEG.
STEG 1: Man visar att $P(n_0)$ är sant.
STEG 2: Man visar att för varje $p \geq n_0$ gäller det att om $P(p)$ är sant, så är även $P(p+1)$ sant.
STEG 3: Man drar den önskade slutsatsen nämligen att $P(n)$ är sant för alla heltal $n \geq n_0$.

Vi ska illustrera tekniken med hjälp av några exempel. Vi skriver ”enligt antagandet” eller använder beteckningen "$\underset{*}{=}$" då vi tar det s.k. "induktionssteget", som är den viktigaste delen av STEG 2.

Exempel 29.a)

Bevisa att för alla $n \in \mathbb{Z}^+$, gäller $P(n)$: $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$.

Lösning:

Vi inför beteckningarna $V(n)$ och $H(n)$ för respektive vänster- och högerled i påståendet

$P(n)$ ovan. d.v.s. $V(n) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)$ och $H(n) = n^2$.

STEG 1: $P(1)$: $V(1) = \sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 2\cdot 1 - 1 = 1$ medan $H(1) = 1^2 = 1$

Alltså är $V(1) = H(1)$ och $P(1)$ är sant.

STEG 2: Vi antar att $P(p)$ är sant för något $p \in \mathbb{Z}^+$, d. v. s.

$$V(p) = \sum_{k=1}^{p}(2k-1) = H(p) = p^2$$

Detta medför att

$$V(p+1) = \sum_{k=1}^{p+1}(2k-1) = \underbrace{(2\cdot 1-1)+(2\cdot 2-1)\ +(2\cdot 3-1)+\ \ldots+(2p-1)}_{\substack{\text{Termer med } k=1 \\ \text{t.o.m. } k=p}} + \underbrace{(2(p+1)-1)}_{\text{Term med } k=p+1}$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{p}(2k-1)\right)}_{\substack{\text{Termer med } k=1 \\ \text{t.o.m. } k=p}} + \underbrace{(2(p+1)-1)}_{\text{Term med } k=p+1} = \left(\sum_{k=1}^{p}(2k-1)\right) + (2p+1)$$

$$\underbrace{=}_{\substack{\text{enl.} \\ \text{antagandet}}} \quad p^2 + 2p + 1.$$

Vi har dessutom att

$$H(p+1) = (p+1)^2 = p^2 + 2p + 1$$

vilket ger att $V(p+1) = H(p+1)$ och $P(p+1)$ är sant. Vi har visat att $P(p)$ sant $\Rightarrow P(p+1)$ sant.

STEG 3: Eftersom $P(1)$ är sant måste enligt STEG 2 även $P(2)$ vara sant, men det innebär även att $P(3)$ är sant o.s.v. och vi kan dra den önskade slutsatsen att $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$ gäller för alla $n \in \mathbb{Z}^+$.

Exempel 29.b)

Visa att

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)=\frac{n(n+3)}{2}$$

för $n \in \mathbb{Z}^+$.

Exempel 30
Bevis av summaformeln för aritmetisk summa med hjälp av ett induktionsbevis.

Bevis:

Vi ska bevisa att $P(n)$: $V(n) = \sum_{i=1}^{n}(a+(i-1)d) = n\frac{2a+(n-1)d}{2} = H(n)$ gäller för alla $n \in \mathbb{Z}^+$.

STEG 1: $P(1)$: $V(1) = \sum_{i=1}^{1}(a+(i-1)d) = a$ $\quad\quad H(1) = \frac{2a}{2} = a$

Alltså $V(1) = H(1)$ d. v. s. $P(1)$ gäller.

STEG 2: Vi antar att $P(k)$ gäller för godtyckligt fixt tal $k \in \mathbb{Z}^+$ d.v.s.

$$\mathrm{V}(k) = \sum_{i=1}^{k}(a+(i-1)d) = k\frac{2a+(k-1)d}{2} = H(k)$$

Detta medför att

$$V(k+1) = \sum_{i=1}^{k+1}(a+(i-1)d) = \sum_{i=1}^{k}(a+(i-1)d) + (a+kd) \underset{*}{=}$$
$$= k\frac{2a+(k-1)d}{2} + a + kd = \frac{2ak + k(k-1)d + 2a + 2kd}{2} =$$
$$= \frac{2a(k+1) + (k^2+k)d}{2} = \frac{2a(k+1) + (k+1)kd}{2} = (k+1)\frac{2a+kd}{2}$$

Dessutom har vi

$$H(k+1) = (k+1)\frac{2a+(k+1-1)d}{2} = (k+1)\frac{2a+kd}{2}$$

d.v.s. $\quad V(k) = H(k) \Rightarrow V(k+1) = H(k+1)$

STEG 3: Enligt steg 1 gäller påståendet för $n = 1$. Då gäller det enligt steg 2 även för $n = 1 + 1 = 2$. Men då gäller det även för $n = 2 + 1 = 3$ o.s.v. Via matematisk induktion har vi alltså att påståendet gäller för alla $n \in \mathbb{Z}^+$, v.s.v.

Exempel 31

Vi skall visa via induktion att sambandet $(1+x)^n \geq 1+nx$ gäller för alla $n \in \mathbb{Z}^+$ och $x \geq -1$.

Bevis:

I. För $n=1$ får vi VL = $(1+x)^1 = 1+x =$ HL
Alltså har vi VL $\geq$ HL för $n=1$.

II. Antag att sambandet gäller för $n = p \geq 1$, d.v.s. $(1+x)^p \geq 1+px$
Studera nu fallet $n = p+1$.
Vi får då: $(1+x)^{p+1} = (1+x)^p \cdot (1+x)$

$$\geq (1+px)(1+x) \qquad \text{(enligt antagandet och eftersom } x \geq -1\text{)}$$
$$= 1+x+px+px^2$$
$$= 1+(p+1)x+px^2$$

Men $1+(p+1)x+px^2 \geq 1+(p+1)x$ eftersom p är ett positivt heltal och $x^2 \geq 0$.
Således gäller $(1+x)^{p+1} \geq 1+(p+1)x$ d.v.s. sambandet gäller för $n = p+1$ om det gäller för $n = p$.

III. Vi har visat att påståendet gäller för $n=1$. Enl. II gäller påståendet då för $n = 1+1 = 2$, och då gäller det för $n = 2+1 = 3$ o.s.v.
Via matematisk induktion gäller således om $x \geq -1$ att $(1+x)^n \geq 1+nx$ för alla $n \in \mathbb{Z}^+$, v.s.v.