

## Kursinformation TMHL24

# Hållfasthetslära – Dimensioneringsmetoder

## HT1, läsåret 2018-2019

Föreläsare: Ulf Edlund (kursansvarig), [ulf.edlund@liu.se](mailto:ulf.edlund@liu.se)  
Lars Johansson, [lars.johansson@liu.se](mailto:lars.johansson@liu.se)

Föreläsningar: 24 h

Lektioner: 24 h + 2 h frågetillfälle  
Grupp a: Jordi Loureiro  
b: Khalid Pirgul  
c, d: Joakim Holmberg

Ämnessekreterare: Lena Sundling, [lena.sundling@liu.se](mailto:lana.sundling@liu.se)  
Anna Wahlund, [anna.wahlund@liu.se](mailto:anna.wahlund@liu.se)

Examination: Skriftlig tentamen om totalt 16 poäng bestående av såväl teori- som räkneuppgifter.

**Tidigare läsårs uppdelning av tentamen i en teoridel utan hjälpmedel och en problemdel med hjälpmedel, upphör fr.o.m. detta läsår.**

Följande hjälpmedel tillåtna:

1. Läroboken H Lundh: Grundläggande hållfasthetslära
2. Formelblad i Hållfasthetslära (finns på hemsidan)
3. Räknedosa (ska medföras programtom om den är programmerbar)

Skrivtiden är 4 timmar.

Obs! För att inte oroa tentavakterna: skriv inget i hjälpmedlen. Däremot kan man gärna använda överstrykningspenna och postit-lappar.

Betygsskala:	Poäng:	Betyg:
	12 – 16	5
	9 – 11	4
	6 – 8	3
	< 6	Underkänt

För slutbetyg erfordras även godkänd Beräkningsuppgift.

Beräkningsuppgift: Obligatorisk individuell beräkningsuppgift: *Svängnings- och utmattningsanalys HT1 2018*. Rapporten lämnas till din lektionsledare för rättning.

Kurslitteratur: Lundh H: *Grundläggande hållfasthetslära*, KTH Hållfasthetslära, Stockholm, 2000.

Larsson P-L, Lundell R: *Exempelsamling i hållfasthetslära*, KTH Hållfasthetslära, Stockholm.

För den som vill fördjupa sig i ämnet (t.ex. läsa ämnets fortsättningskurser) rekommenderas också:

B Sundström (red): *Handbok och formelsamling i hållfasthetslära*, Inst. för hållfasthetslära, KTH, Stockholm 1998 (eller senare)

## Kursplan

	Innehåll	Kap. i Lundh
<b>Fö 1</b>	<b>Koordinattransformationer. Spänningstensorn. Transformation av komponenterna mellan olika koordinater.</b>	Fö.anteckn. Spänningstensorn
	Le 1 1.1.2, 1.1.4, 1.1.12, 1.1.15, 1.1.16	
<b>Fö 2</b>	<b>Huvudspänningar. Största skjuvspänning. Hydrostatisk spänning.</b>	9.1-9.2.5
	Le 2 1.1.1, 1.1.7, 1.1.8, 1.1.13b, 1*, 2*	
<b>Fö 3</b>	<b>Flythypoteser enl. Tresca och von Mises.</b>	12
	Le 3 2.11.2, 2.11.3, 2.11.7, 2.11.10, 2.11.11	
<b>Fö 4</b>	<b>Linjär brottmekanik.</b>	14.1, 14.3-14.5
	Le 4 2.12.10, 2.12.11, 2.12.12, 2.12.17, 2.12.18	
<b>Fö 5</b>	<b>Utmattning. Wöhlerdiagram. Haighdiagram.</b>	13
	Le 5 <sup>1</sup> 2.12.31, 2.12.32 <sup>2</sup> , 2.12.41 <sup>3</sup> , 2.12.43 <sup>3</sup>	
<b>Fö 6</b>	<b>Linjär delskadeteori. Paris lag.</b>	14.6, Fö.anteckn. Linjär delskadeteori
	Le 6 <sup>2</sup> 2.12.22, 2.12.23 <sup>4</sup> , 2.12.24, 2.12.25 <sup>5</sup> , 19*	
<b>Fö 7</b>	<b>Svängningar I: Fria svängningar (modellproblem)</b>	17.1, 17.2
	Le 7 3*, 4*, 5*, 6*, 7*, 8*, 9*, 10*	
<b>Fö 8</b>	<b>Svängningar II: Påtvingade svängningar (modellproblem)</b>	17.2
	Le 8 11*, 12*, 13*	
<b>Fö 9</b>	<b>Svängningar III: Transversella svängningar hos balkar. Torsionssvängningar. Kritiskt varvtal.</b>	17.2
	Le 9 4.1.2, 4.1.4, 4.1.12, 4.1.26, 4.1.29 <sup>6</sup>	
<b>Fö 10</b>	<b>Svängningar IV: Diskreta system med flera frihetsgrader. Egenvärdesproblemet.</b>	17.3, 17.4
	Le 10 4.2.1 <sup>7</sup> , 4.2.4, 4.2.8, 4.2.17 <sup>8</sup> , 4.2.19	
<b>Fö 11</b>	<b>Svängningar V: Kontinuerliga balkar.</b>	17.5
	Le 11 4.3.17, 4.3.18 <sup>9</sup> , 4.3.19, 4.3.22 <sup>10</sup> , 4.3.24	
<b>Frågetillfälle:</b> Tal på tidigare lektioner, beräkningsuppgiften m.m.		
<b>Fö 12</b>	<b>Knäcklast för initialrak balk. Berrys funktioner.</b>	8.1, 8.2, 8.3, 8.4, 8.5
	Le 12 2.10.1, 2.10.23, 2.10.25, 14*, 15*, 16*, 17*, 18*, 20*	

<sup>1</sup> Materialdata: se Formelblad i Hållfasthetslära.

<sup>2</sup> Säkerhet m.a.p. för stort  $M_0$  avses, d.v.s. ändring av  $\sigma_m$  och  $\sigma_a$  med samma faktor.

<sup>3</sup> Modifierad formulering:  $\frac{\lambda}{K_r K_d} = 1$  är givet.

<sup>4</sup>  $K_1 = \sigma_\infty \sqrt{\pi a} f_7$ , där  $f_7$  hämtas ur diagram och antas konstant. Det är en ytspricka, inte kantspricka som det står i formuleringen.

<sup>5</sup>  $f_5$  antas konstant men  $\sqrt{a}$ -beroendet behålls och Paris lag integreras.

<sup>6</sup> Fel i facit. Rätt svar: amplituden blir  $\frac{7 P_0 L^3}{22 EI}$ . (Rättat fr.o.m 7:e upplagan.)

<sup>7</sup> Sätt  $k = \frac{EA}{L}$ . Svar:  $\omega_{e1} = \sqrt{\frac{EA}{3mL}}$ ,  $\omega_{e2} = \sqrt{\frac{EA}{mL}}$ .

<sup>8</sup> a) Best. egenvinkelfrekvenserna b) Best. amplituden hos massan  $2m$  (= uppgiften i texten).

<sup>9</sup> a) Sätt  $x = 0$  i vänstra änden på balken. b) Sätt  $x = 0$  mitt på balken och anta att lägsta egenmoden är symmetrisk (så att två konstanter i den allmänna lösningen kan sättas till noll direkt).

<sup>10</sup> Bestäm gärna  $\omega_{e1}$  och  $\omega_{e2}$  för specialfallet  $m_0 = m_1 = m$  genom att beräkna rötterna  $\lambda_1$  och  $\lambda_2$  med t.ex. Matlab. Svar:  $\omega_{e1} = 1,56 \sqrt{\frac{EI}{mL^3}}$ ,  $\omega_{e2} = 16,2 \sqrt{\frac{EI}{mL^3}}$ .

### Avsnittet svängningar

Avsnittet om svängningar resulterar i differentialekvationer av andra ordningen med konstanta koefficienter. Repetera därför Kapitel 9.3 (s. 394-409) *Matematisk Analys – En variabel* av Forsling & Neymark. Notera speciellt fallet då den karakteristiska ekvationen har komplexa rötter: efter omskrivning med Eulers formel (ekv. 2.68, s. 112) resulterar det i en lösning som beskriver svängningar. (Se Exempel 9.15, s. 398 i Forsling & Neymark.)

Föreläsning 7 och 8 täcks av Sections 8/1, 8/2 och 8/3 i *Engineering Mechanics - Dynamics* av Meriam & Kraige.

### Grekiska alfabetet

---

A	$\alpha$	alfa	N	$\nu$	ny
B	$\beta$	beta	$\Xi$	$\xi$	xi
$\Gamma$	$\gamma$	gamma	O	$o$	omikron
$\Delta$	$\delta$	delta	$\Pi$	$\pi$	pi
E	$\epsilon$	epsilon	P	$\rho, \varrho$	rho
Z	$\zeta$	zeta	$\Sigma$	$\sigma$	sigma
H	$\eta$	eta	T	$\tau$	tau
$\Theta$	$\theta$	theta	$\Upsilon$	$\upsilon$	ypsilon
I	$\iota$	jota	$\Phi$	$\phi, \varphi$	fi
K	$\kappa$	kappa	X	$\chi$	chi
$\Lambda$	$\lambda$	lambda	$\Psi$	$\psi$	psi
M	$\mu$	my	$\Omega$	$\omega$	omega

---

**Kompletterande uppgifter (markerade med \* i kursplanen)**

1. Spänningstillståndet i en punkt i en belastad kropp är i  $xyz$  - komponenter:

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} 2a & a & 0 \\ a & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 2a \end{bmatrix}, \quad a = \text{konstant.}$$

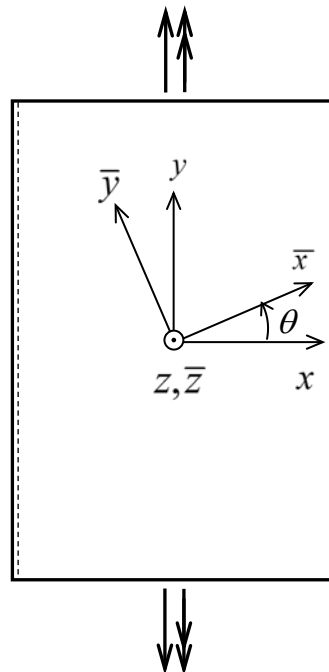
Bestäm huvudspänningar och huvudspänningsriktningar.

2. Ett tunnväggigt rör belastas med dragning och vridning. I  $xyz$  - komponenter är spänningstillståndet:

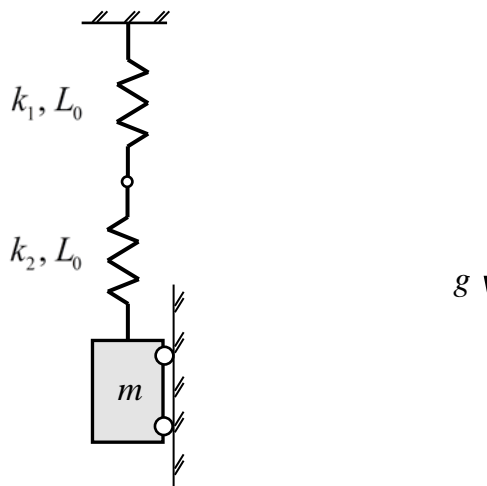
$$\underline{S} = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Koordinaterna  $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$  erhålls genom en rotation kring  $z = \bar{z}$  enligt Figur.

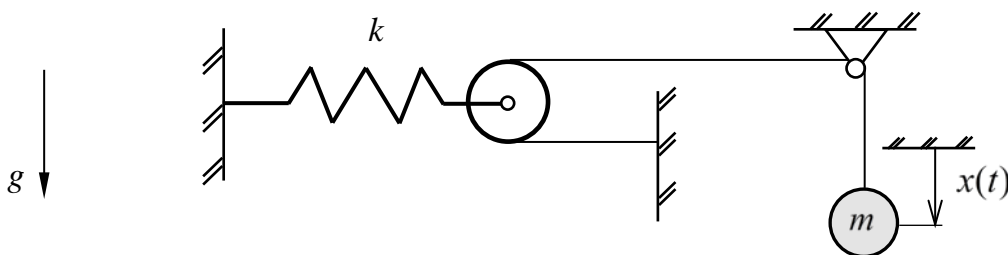
- a) Transformera  $\underline{S}$  till  $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ -komponenter.  
b) Identifiera spänningskomponenterna på en yta med normal i  $\bar{x}$ - riktning.



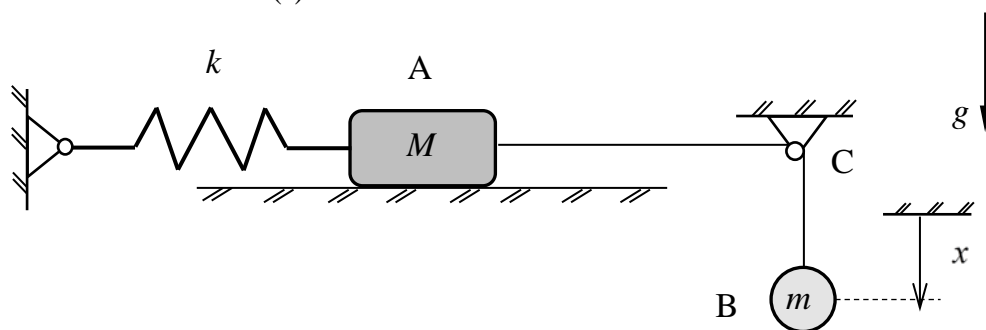
3. En massa  $m$  är upphängd i två seriekopplade fjädrar med fjäderkonstanterna  $k_1$ , respektive  $k_2$ . Fjädrarna har samma naturliga (ospända) längd  $L_0$ . Anordningen kan endast röra sig i vertikalled. Beräkna anordningens egenvinkelfrekvens.



4. En punktmassa  $m$  är ihopkopplad med ett snöre, en masslös trissa och en fjäder med fjäderkonstanten  $k$ . Bestäm systemets egenvinkelfrekvens. Snöret är hela tiden sträckt och koordinaten  $x$  är sådan att fjädern är ospänd då  $x = 0$ .

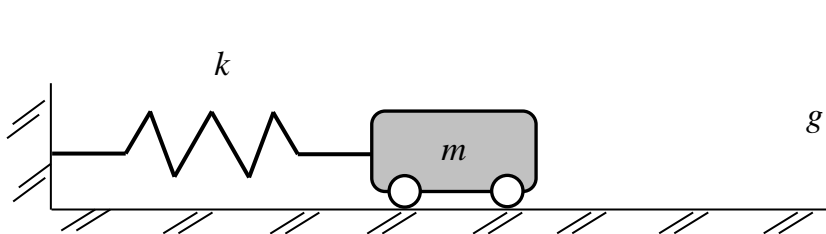


5. Två partiklar A och B med massorna  $M$  respektive  $m$  är förenade med ett snöre som löper över en liten trissa C enligt Figur. Partikel A kan glida längs ett horisontellt friktionsfritt bord medan B hänger fritt utanför bordet. Partikel A är kopplad till en fjäder med fjäderkonstanten  $k$ . Fjäders utsträckning från ospänd längd är  $\Delta$ . Därefter släpps anordningen från vila, med sträckt snöre. Bestäm  $x(t)$  om snöret hela tiden är sträckt.



Koordinaten  $x$  är definierad så att  $x = 0$  när fjädern är ospänd.

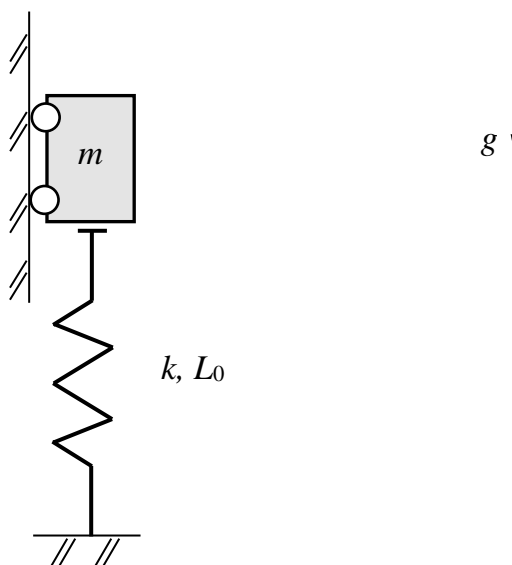
6. En vagn med massan  $m$  sitter fast i en fjäder med fjäderkonstanten  $k$ . Fjäders utsträckning från ospänd längd är  $d$ . Sedan släpps vagnen från vila. Beräkna efter hur lång tid vagnen återvänder till läget varifrån den släpptes.



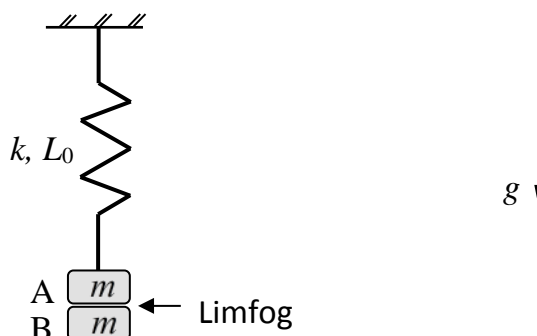
7. En massa  $m$  hålls i vila så att den precis berör en fjäder med fjäderkonstanten  $k$  och ospänd (naturlig) längd  $L_0$ , varefter massan släpps.

Beräkna

- efter hur lång tid  $t_1$  massan når sitt nedersta läge första gången.
- kraften från fjädern på massan i det läget.



8. Två partiklar A och B har vardera massan  $m$ . De limmas ihop, varvid limfogen maximalt kan överföra kraften  $\frac{3}{2}mg$ . De ihoplimmade partiklarna A och B hängs upp i en fjäder med fjäderkonstanten  $k$  och ospända längden  $L_0$ . Från början är A och B understödda så fjädern är ospänd. Vid tiden  $t = 0$  rycker man undan stödet. Bestäm det värde på  $t^*$  vid vilket B lossnar från A.





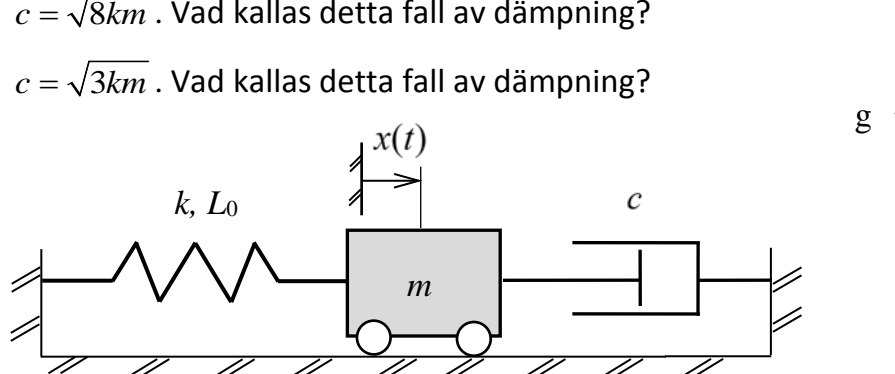
9. En vagn med massan  $m$ , som kan röra sig friktionsfritt på ett horisontellt plan, är ihopkopplad med en masslös fjäder och en dämpare enligt Figur.

Fjäders fjäderkonstanten  $k$  och naturliga (ospända) längden  $L_0$ .

Fjäders dras ut till längden  $\frac{3}{2}L_0$  och anordningen släpps sedan från vila.

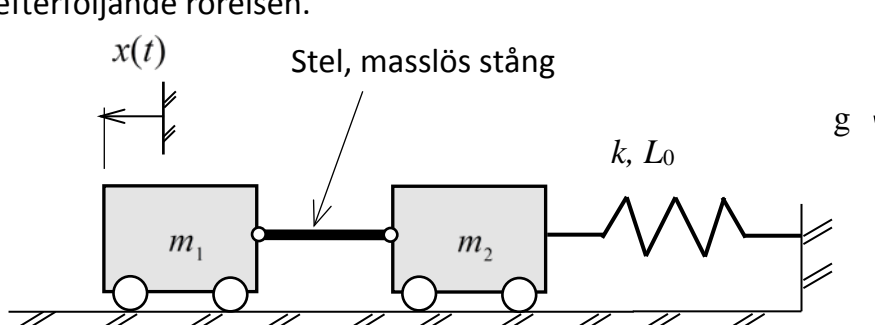
Koordinaten  $x$  är definierad så att fjäders är ospänd när  $x$  är noll. Beräkna  $x(t)$  om dämparen har dämpkonstanten

- $c = 2\sqrt{km}$ . Vad kallas detta fall av dämpning?
- $c = \sqrt{8km}$ . Vad kallas detta fall av dämpning?
- $c = \sqrt{3km}$ . Vad kallas detta fall av dämpning?



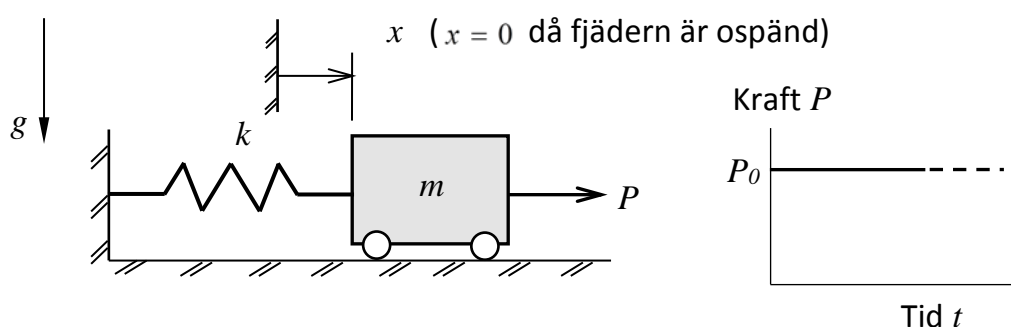
10. Två vagnar med massorna  $m_1$ , respektive  $m_2$ , kan röra sig på ett friktionsfritt horisontellt plan. De är ihopkopplade med en masslös stel stång och är fastsatta med en masslös fjäder enligt Figur. Fjäders har fjäderkonstanten  $k$  och naturliga (ospända) längden  $L_0$ . Systemet förskjuts sträckan  $\Delta$  åt vänster från läget där fjäders är ospänd, och släpps sedan från vila. Koordinaten  $x$  är definierad så att fjäders är ospänd när  $x$  är noll.

- Ställ upp rörelseekvationen för systemet.
- Beräkna kraften i stången som funktion av tiden för den efterföljande rörelsen.



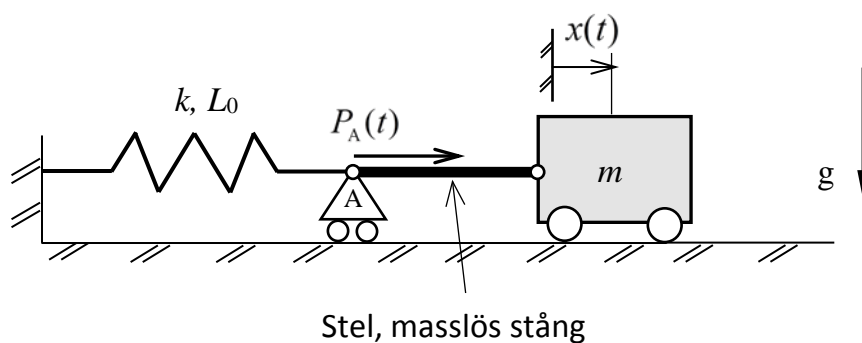
11. När vagnen är i vila med ospänd fjäder vid  $t = 0$ , läggs en konstant kraft  $P = P_0$  på enligt Figur.

- Ställ upp rörelseekvationen för vagnen med tillhörande begynnelsevillkor.
- Beräkna vagnens läge  $x$  som funktion av tiden och rita grafen.
- Bestäm lösningen vid fortvarighet (d.v.s. vid *steady-state*).



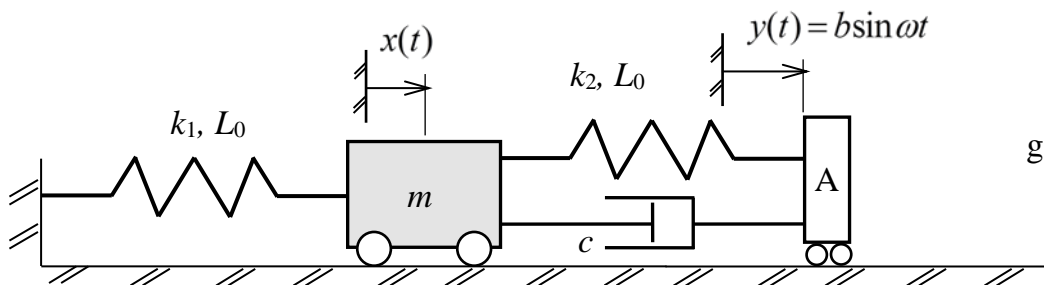
12. En vagn med massan  $m$  som kan röra sig på ett horisontellt plan är ihopkopplad med en masslös fjäder och en masslös stel stång enligt Figur. Fjäders har fjäderkonstanten  $k$  och naturliga (ospända) längden  $L_0$ . När systemet befinner sig i vila och då fjädern är ospänd läggs en given yttre kraft  $P_A(t) = P \sin \omega t$  på stödet A. Koordinaten  $x$  är definierad så att fjädern är ospänd när  $x$  är noll.

- Ställ upp rörelseekvationen.
- Bestäm rörelsen  $x(t)$  vid forvarighet (*steady-state*).

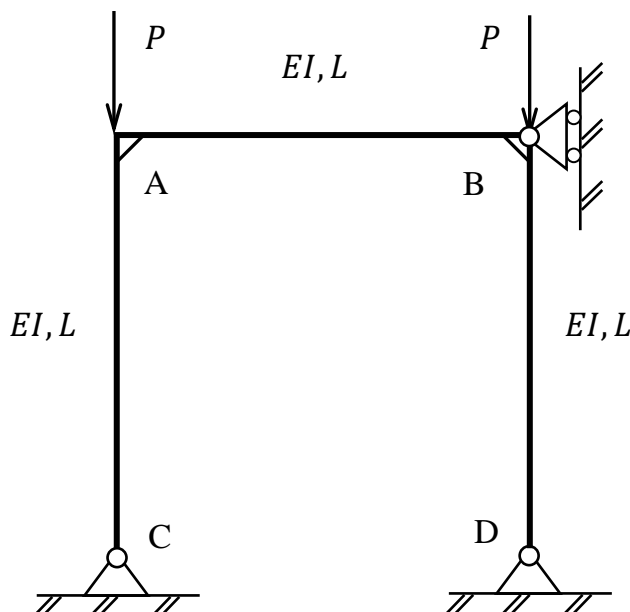


13. En vagn med massan  $m$  som kan röra sig på ett horisontellt plan sitter fast med två fjädrar med fjäderkonstanterna  $k_1, k_2$  och naturliga (ospända) längder  $L_0$ , samt med en dämpare med dämpkonstanten  $c$ . Koordinaterna  $x$  och  $y$  är definierade så att fjädrarna är ospända när  $x$  och  $y$  båda är noll. När systemet befinner sig i vila med ospända fjädrar, ges den fria änden A en styrd harmonisk förskjutning  $y(t) = b \sin \omega t$ .

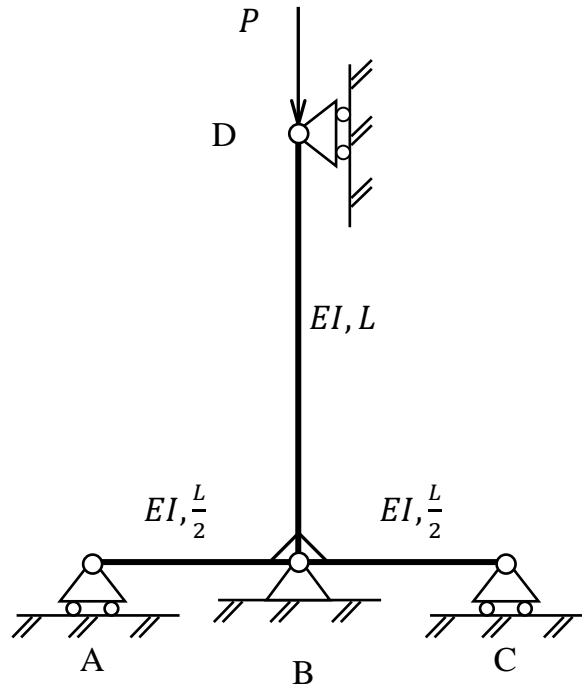
- a) Ställ upp rörelseekvationen.  
b) Bestäm rörelsen  $x(t)$  för fallet att dämpkonstanten  $c = 0$ .



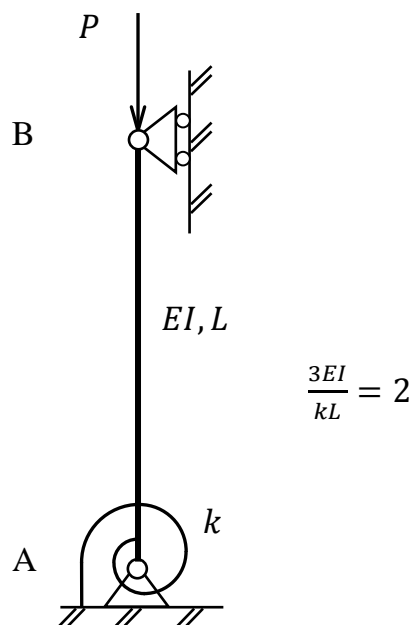
14. Bestäm det värde på  $P$  för vilket värdet ramen enligt figur blir instabil. Delarna är förenade med böjstyva hörn.



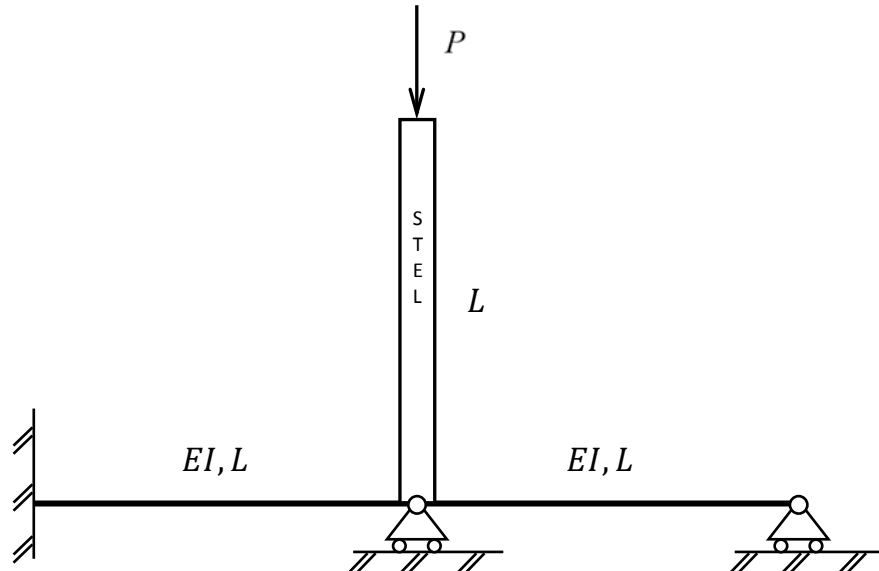
15. En ramkonstruktion består av tre stycken balkar med samma böjstyvhets  $EI$ . Bestäm det värde på  $P$  för vilket värdet anordningen blir instabil. Balkarna är förenade med böjstyva hörn.



16. Styvheten vid balkens infästning vid A är sådan att den motsvarar ett kraftparmoment  $C = k\varphi$ , där  $\varphi$  är balkens vinkeländring vid A. Bestäm kraften då anordningen blir instabil.

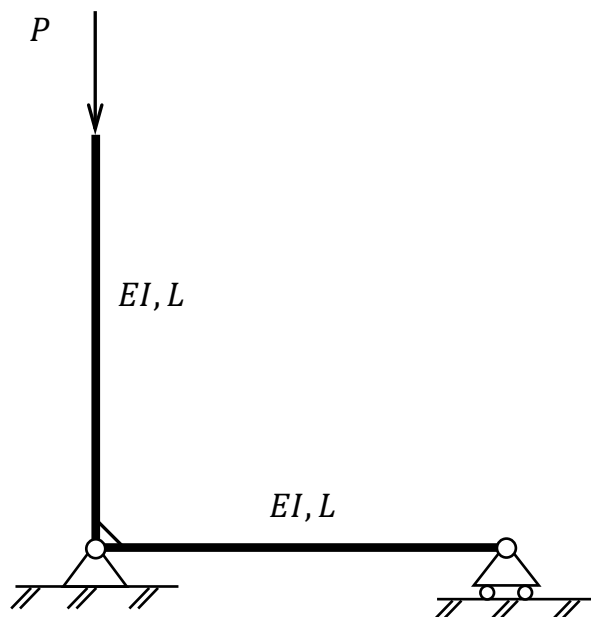


17. En stel vertikal kropp hålls i läge av två elastiska balkar. Beräkna det kritiska värdet på lasten med avseende på instabilitet.



18. Två elastiska balkar är förenade med ett böjstyvt hörn. Den vertikala balken är belastad med en vertikal tryckkraft  $P$ .

- Bestäm den ekvation, ur vilken den kritiska kraften  $P_k$  för vilken anordningen blir instabil, kan beräknas.
- Beräkna  $P_k$ .



19. En konstruktionsdetalj utsätts upprepade gånger för en lastsekvens bestående av en växlande last med följande lastamplituder:

$$\sigma_a = 200, 180, 150, 100 \text{ MPa}$$

Antalet lastcykler vid respektive belastningsnivå är:

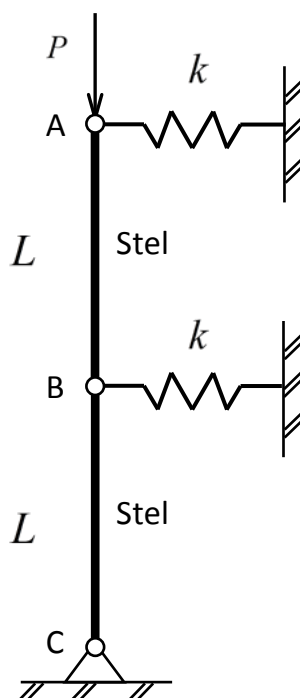
$$n = 15, 20, 150, 3000$$

Materialets Wöhlerkurva följer sambandet

$$\sigma_a = -55 \log N + 430 \text{ MPa}$$

Bestäm den delskada som detaljen utsätts för under en lastsekvens och hur många lastsekvenser detaljen klarar om utmattningsbrott antas inträffa för sammanlagd delskada  $D = 1$ .

20. Anordningen i Figuren består av två stela stänger och två fjädrar och är sammanfogade med leder vid A, B och C. Stängerna har båda längden  $L$  och fjädrarna har båda fjäderkonstanten  $k$ . Fjädrarna kan röra sig i vertikalled så att de alltid är horisontella. Anordningen belastas med en vertikal kraft  $P$ . Bestäm den kritiska kraften  $P_k$  för vilken anordningen blir instabil.



**Svar**

$$1. \quad \sigma_1 = a, \underline{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_2 = 2a, \underline{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \sigma_3 = 3a, \underline{n}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$2. \quad a) \quad \underline{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} 2\tau cs + \sigma s^2 & \tau c^2 - \tau s^2 + \sigma sc & 0 \\ \tau c^2 - \tau s^2 + \sigma sc & -2\tau cs + \sigma c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{där } s = \sin \theta, c = \cos \theta$$

$$b) \quad \begin{cases} \sigma_{\bar{x}} = 2\tau \sin \theta \cos \theta + \sigma \sin^2 \theta \\ \tau_{\bar{x}\bar{y}} = \tau(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \sigma \sin \theta \cos \theta \end{cases}$$

$$3. \quad \omega_e = \sqrt{\frac{1}{m} \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}$$

$$4. \quad \omega_e = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$5. \quad x(t) = \frac{mg}{k} + \left(\Delta - \frac{mg}{k}\right) \cos \omega_e t, \quad \text{där } \omega_e = \sqrt{\frac{k}{M + m}}$$

$$6. \quad t = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$7. \quad a) \quad t_1 = \pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$b) \quad F = 2mg$$

$$8. \quad t^* = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{2m}{k}}$$

$$9. \quad a) \quad x(t) = \frac{L_0}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{k}{m}} t\right) e^{-\sqrt{\frac{k}{m}} t}. \quad \text{Kritisk dämpning föreligger.}$$

$$b) \quad x(t) = \frac{1}{4}(\sqrt{2} + 1)L_0 e^{-(\sqrt{2}-1)\sqrt{\frac{k}{m}} t} - \frac{1}{4}(\sqrt{2} - 1)L_0 e^{-(\sqrt{2}+1)\sqrt{\frac{k}{m}} t}. \quad \text{Stark dämpning.}$$

$$c) \quad x(t) = L_0 e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_e t} \sin\left(\frac{1}{2}\omega_e t + 30^\circ\right), \quad \text{där } \omega_e = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad \text{Svag dämpning.}$$

$$10. a) \quad \ddot{x} + \omega_e^2 x = 0, \text{ där } \omega_e = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}$$

$$b) \quad F_{\text{stång}} = m_1 \Delta \omega_e^2 \cos \omega_e t$$

$$11. a) \quad \ddot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{P_0}{m}, \quad x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$$

$$b) \quad x(t) = \frac{P_0}{k} (1 - \cos \omega_e t), \quad \omega_e = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$c) \quad x(t) = \frac{P_0}{k}$$

$$12. a) \quad \ddot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{P}{m} \sin \omega t$$

$$b) \quad x(t) = \frac{1}{k - m\omega^2} P \sin \omega t$$

$$13. a) \quad \ddot{x} + \frac{c}{m} \dot{x} + \omega_e^2 x = \frac{k_2 b}{m} \sin \omega t + \frac{c}{m} \omega b \cos \omega t, \quad \omega_e = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

$$b) \quad x(t) = \frac{k_2 b}{m(\omega_e^2 - \omega^2)} \left( \sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_e} \sin \omega_e t \right)$$

$$14. \quad P_k = 3.59^2 \frac{EI}{L^2} \approx 12.9 \frac{EI}{L^2}$$

$$15. \quad P_k = 4.18^2 \frac{EI}{L^2} \approx 17.5 \frac{EI}{L^2}$$

$$16. \quad P_k = 3.5^2 \frac{EI}{L^2} \approx 12.25 \frac{EI}{L^2}$$

$$17. \quad P_k = 7 \frac{EI}{L^2}$$

$$18. a) \quad \gamma^2 (1 + \phi(\gamma)) - 3 = 0, \quad P = \gamma^2 \frac{EI}{L^2}$$

$$b) \quad \gamma_1 \approx 1.1925 \text{ (minsta roten) ger } P_k \approx 1.42 \frac{EI}{L^2}$$



19. Delskada under 1 lastsekvens är 0.00578 . Brott fås efter 173 lastsekvenser.

20. 
$$P_k = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} kL \approx 0.382kL$$