Tentamen
TNA001 – Matematisk grundkurs

Datum:	2013-10-25
Tid:	08.00 – 13.00
Kurskod:	TNA001
Provkod:	TEN1
Institution:	ITN
Examinator:	Sixten Nilsson
Hjälpmedel:	Inga, förutom skriv- och ritmateriel

Bedömningsgrunder och beskrivning av vad som menas med en fullständig lösning

Uppgifterna på denna tentamen bedöms genom att varje uppgift poängsätts med 0 - 6 poäng. Om inte annat framgår av texten, skall **fullständig lösning** lämnas. Med detta menas att följande moment skall i *lämplig omfattning* ingå i lösningen:

1. Lösningen skall ha förklarande text med förklaringar på vad som görs och varför det får göras. En hänvisning till teorin kan här vara lämpligt. Även en figur kan vara ett bra stöd i detta arbete.
2. Lösningen skall ha en struktur som är lätt att följa.
3. Lösningen skall innehålla en kalkyldel där det går att följa hur resultaten har uppkommit.
4. Lösningen skall ha ett tydligt angivet svar/resultat som är kopplat till den fråga som är ställd.
5. Svaret/resultatet skall där så är lämpligt utvärderas, dvs. prövningar skall genomföras som säkrar resultatet

Poängsättningen vid rättningen tar hänsyn till hur väl samtliga delar ovan är genomförda.

Betyg

Betyg	Poäng på tentamen (inklusive bonuspoäng)
5	≥ 36 , varav minst 2p på var och en av de fem första uppgifterna
4	28 – 35, varav minst 2p på var och en av de fem första uppgifterna
3	20 – 27, varav minst 2p på var och en av de fem första uppgifterna
U	0 – 19

Lösningsskisser kommer att finnas på kurshemsidan http://webstaff.itn.liu.se/~sixni/TNA001.htm i samband med tentamenstidens slut.

1. a) Vilka reella tal x uppfyller villkoret

$$x-3 \leq \frac{4}{x}?$$

b) Lös ekvationen $|2x-1| + 4x = |x+2|$ för reella x.

2. I en ON-bas är punkten $P = (2,1,0)$ och linjen L har ekvationen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$.

a) Bestäm koordinaterna för den ortogonala projektionen av P på linjen L.
b) Beräkna avståndet mellan P och linjen L.
Anm: Lösning utan figur är inte fullständig.

3. a) Låt z_1 och z_2 vara de komplexa talen $z_1 = \frac{1}{2}e^{i\pi/4}$ respektive $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$.
Beräkna $(z_1 \cdot z_2)^{26}$. Ange svaret på formen $a + bi$ där $a, b \in \mathbb{R}$.

b) Markera i ett komplext talplan alla komplexa tal z som samtidigt uppfyller de båda villkoren $|z-(2+2i)| \leq 1$ och $0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}$. Uppgiften behöver inte lösas analytiskt. Figuren skall ritas tydligt och noggrant.

4. a) Illustrera i en enhetscirkel, så noggrant som möjligt, de två sambanden

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \sin v \quad \text{respektive} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \cos v.$$

Kommentera figuren på lämpligt sätt.

b) Bestäm alla lösningar till ekvationen

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin x.$$

5. a) Bestäm alla reella tal x som uppfyller $\ln(x-3) + \ln(x+1) = \ln(5-x)$.

b) Har funktionen $f(x) = \ln(x-1)^2$, $x > 1$, någon invers? Bestäm i så fall inversen inklusive dess definitionsmängd.

6. I en ON-bas $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ges ett plan av att origo ligger i planet och att det är parallellt med vektorerna $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ och $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.
Beräkna vinkeln (den minsta) mellan detta plan och linjen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$. Vinkeln får anges med hjälp av en arcusfunktion.

7. Visa att

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{3^k} = 3 - \frac{2n+3}{3^n}$$

för alla $n \in \mathbb{Z}^+$.