TNA001 - FÖ 2 Kap 1.3, 1.4 (t.o.m. sid. 26)

1.3 Ekvationer, koordinatsystem och räta linjer, cirkelns ekvation

(Anm: Eventuellt tas cirkelns ekvation upp på lektionstid)

a) Ekvationslösning

Exempel 6
Lös fullständigt, med angivande av ekvivalens- och/eller implikationspilar, följande ekvationer. **Kontrollera resultatet.**

a) $2x - 8 = 5 - 3x$ b) $x^3 = x^2$

b) **Räta linjer**, **normal** till rät linje.

Inledning

1. Vad menas med ekvationen för en rät linje?
2. Hur kan man skriva ekvationen för en rät linje (olika sätt)?
3. I vissa fall kan ekvationen för en rät linje skrivas $y = y_0$. Vad innebär det?
4. I vissa fall kan ekvationen för en rät linje skrivas $x = x_0$. Vad innebär det?

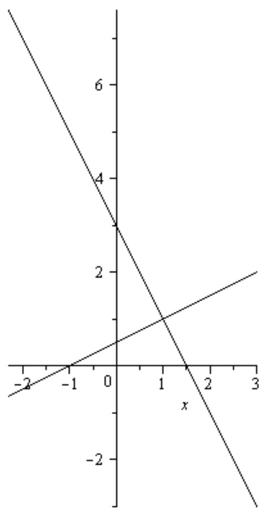
Exempel 7

a) Bestäm en ekvation för den räta linje som går genom punkterna $(-2,7)$ och $(1,1)$.

b) Undersök om punkterna $(-1,5)$ och $(50,-103)$ ligger på linjen.

c) Bestäm linjens skärningspunkter med koordinataxlarna.

d) Bestäm en ekvation till normalen till linjen i punkten $(1,1)$.



1.4 Mer om ekvationer m.m.

a) Kvadratrötter

Kvadratroten ur ett reellt tal $a \geq 0$, $\sqrt{a}$, definieras som det ickenegativa reella tal vars kvadrat är lika med *a*, d.v.s.

$$x = \sqrt{a} \Leftrightarrow x^2 = a, x \geq 0 .$$

Alltså är

$$\sqrt{49} = 7 \text{ ty } 7^2 = 49 \text{ och där } 7 \geq 0$$

och

$$\sqrt{1\frac{9}{16}} = \frac{5}{4} \text{ ty } \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} = \frac{25}{16} = 1\frac{9}{16} \text{ och där } \frac{5}{4} \geq 0.$$

Om vi nu vill lösa andragradsekvationen $x^2 = a$, där $a \geq 0$, kan vi skriva om detta med hjälp av

konjugatregeln:

$$x^2 = a \Leftrightarrow x^2 - a = 0 \Leftrightarrow x^2 - (\sqrt{a})^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - \sqrt{a})\,(x + \sqrt{a}) = 0$$

och vi har två fall, vilket ger två rötter

- Fall 1: $x - \sqrt{a} = 0 \Leftrightarrow \ x_1 = \sqrt{a}$
- Fall 2: $x + \sqrt{a} = 0 \Leftrightarrow \ x_2 = -\sqrt{a}$

Vi sammanfattar detta:

Ekvationen $x^2 = a$, där $a \geq 0$, har de båda rötterna $x_1 = \sqrt{a}$ och $x_2 = -\sqrt{a}$

Anm 1. Man skriver ofta detta som $x_{1,2} = \pm\sqrt{a}$

Anm 2. Om $a = 0$ sammanfaller de båda rötterna till en s.k. dubbelrot $x_{1,2} = 0$

Anm 3. Om $a < 0$ saknas reella rötter d. v. s. $x \in \varnothing$.

Exempelvis har vi

$$x^2 = 49 \Leftrightarrow x^2 - 49 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \sqrt{49}\right)\left(x + \sqrt{49}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{49} \text{ eller } x = -\sqrt{49} \Leftrightarrow x = 7 \text{ eller } x = -7$$

och

$$x^2 = 7 \Leftrightarrow x^2 - 7 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \sqrt{7}\right)\left(x + \sqrt{7}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{7} \text{ eller } x = -\sqrt{7}$$

Anm: Ekvationen $x^2 = -49$ har inga reella rötter, ty $x^2 \geq 0$ för alla reella tal x. Om vi vill lösa ekvationen får vi komplexa rötter genom att vi arbetar på följande sätt, där i är den imaginära enheten med $i^2 = -1$

$$x^2 = -49 \Leftrightarrow x^2 + 49 = 0 \Leftrightarrow x^2 - i^2 49 = 0 \Leftrightarrow (x - i \cdot 7)(x + i \cdot 7) = 0 \Leftrightarrow x = 7i \text{ eller } x = -7i$$

b) Kvadratkomplettering och andragradsekvationer

Ett andragradspolynom på formen $ax^2 + bx + c$ måste i många fall kunna uttryckas som en summa eller en differens av två kvadrater. Metoden kallas **kvadratkomplettering** och man använder då någon av kvadreringsreglerna för att *komplettera* x^2 - och x-termerna med ett tal så att en kvadrat erhålls. Metoden demonstreras via några exempel.

Exempel 8
Kvadratkomplettera uttrycken

a) $x^2 + 6x + 7$ b) $2x^2 - \frac{x}{3} - \frac{1}{4}$ c) $-x^2 + 7x - 13$

Anmärkning:
Uttrycket i a) är ≥ -2. Varför? Det minsta värdet antas då $x = -3$. Varför?
Uttrycket i b) är $\geq -\frac{19}{72}$. Varför? För vilket värde på x antas detta minsta värde?

Andragradsekvationer, ekvationer med rationella uttryck, rotekvationer.

Exempel 9

Lös ekvationerna

a) $(x-3)(x+1)=0$ b) $(2x+5)(1-3x)=0$ c) $x^2-2x-3=0$

d) $3x^2+4x=3$ e) $\frac{2x+7}{x+2}-\frac{1}{x}=2$ f) $\frac{1}{x}-\frac{1}{x-x^2}=0$

g) $\sqrt{x-3}=5-x$ (exempel på en ”rotekvation”)

h) Ibland måste man kvadrera en rotekvation flera gånger! Ge exempel på ett sådant fall.

Lösning:

a)

$$(x-3)(x+1)=0 \Leftrightarrow x-3=0 \text{ eller } x+1=0 \Leftrightarrow x=3 \text{ eller } x=-1$$

Svar: $x=3$ eller $x=-1$

b)

$$(2x+5)(1-3x)=0 \Leftrightarrow 2x+5=0 \text{ eller } 1-3x=0 \;\Leftrightarrow 2x=-5 \text{ eller } -3x=-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{5}{2} \text{ eller } x=\frac{1}{3}$$

Svar: $x=-\frac{5}{2}$ eller $x=\frac{1}{3}$

c)

$$x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow [\text{kvadratkomplettera}]$$

$$(x-1)^2-(1)^2-3=0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2-4=0 \Leftrightarrow [\text{konjugatregeln}]$$

$$\big((x-1)-2\big)\big((x-1)+2\big)=0 \Leftrightarrow$$

$$(x-3)(x+1)=0 \Leftrightarrow$$

$$x-3=0 \text{ eller } x+1=0 \Leftrightarrow$$

$$x=3 \text{ eller } x=-1$$

Alternativt skriver vi lösningen

$$x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow [\text{kvadratkomplettera}]$$

$$(x-1)^2-(1)^2-3=0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2-4=0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2=4 \Leftrightarrow$$

$$x-1=\sqrt{4} \text{ eller } x-1=-\sqrt{4} \Leftrightarrow$$

$$x=3 \text{ eller } x=-1$$

Svar: $x=3$ eller $x=-1$

d)

$$3x^2+4x=3 \Leftrightarrow$$

$$x^2+\frac{4}{3}x-1=0 \Leftrightarrow [\text{kvadratkomplettera}]$$

$$\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2-1=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{13}{9}=0 \Leftrightarrow \text{[konjugatregeln]}$$

$$\left(\left(x+\frac{2}{3}\right)-\sqrt{\frac{13}{9}}\right)\left(\left(x+\frac{2}{3}\right)+\sqrt{\frac{13}{9}}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x+\left(\frac{2}{3}-\sqrt{\frac{13}{9}}\right)\right)\left(x+\left(\frac{2}{3}+\sqrt{\frac{13}{9}}\right)\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$x=-\frac{2}{3}+\sqrt{\frac{13}{9}} \text{ eller } x=-\frac{2}{3}-\sqrt{\frac{13}{9}} \Leftrightarrow$$

$$x=\frac{-2+\sqrt{13}}{3} \text{ eller } x=\frac{-2-\sqrt{13}}{3}$$

Alternativ lösningsgång

$$3x^2+4x=3 \Leftrightarrow$$

$$x^2+\frac{4}{3}x-1=0 \Leftrightarrow \text{[kvadratkomplettera]}$$

$$\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2-1=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{13}{9}=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x+\frac{2}{3}\right)^2=\frac{13}{9} \Leftrightarrow$$

$$x+\frac{2}{3}=\pm\frac{\sqrt{13}}{3} \Leftrightarrow$$

$$x=-\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{13}}{3} \text{ eller } x=-\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{13}}{3}$$

Svar: $x=-\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{13}}{3}$ eller $x=-\left(\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{13}}{3}\right)$

e) **Ekvationer med rationella uttryck.**
Här är idén att multiplicera ekvationen (d.v.s. *alla* dess termer) med minsta gemensamma nämnare (MGN) och på så sätt t.ex. få en polynomekvation (se FÖ 3). Det är lämpligt att *från början* undersöka ekvationens definitionsområde D_{ekv} så att vi, då vi löst polynomekvationen (motsvarande), kan avslöja eventuella falska rötter.

Vi har $D_{\text{ekv}}=\{x\in\mathbb{R}: x\neq -2, x\neq 0\}$. Alltså

$$\frac{2x+7}{x+2}-\frac{1}{x}=2 \text{ och } x\in D_{\text{ekv}} \Leftrightarrow \text{ [Multiplicera ekvationen med MGN} = x(x+2)]$$

$$x(2x+7)-(x+2)=2x(x+2) \text{ och } x\in D_{\text{ekv}} \Leftrightarrow 2x^2+7x-x-2=2x^2+4x \text{ och } x\in D_{\text{ekv}} \Leftrightarrow$$

$$2x=2 \text{ och } x\in D_{\text{ekv}} \Leftrightarrow$$

$$x=1$$

Eftersom $x=1\in D_{\text{ekv}}$ så är ekvationens lösning $x=1$.

Svar: $x=1$

f) Vi har $D_{\text{ekv}} = \{x \in \mathbb{R}: x \neq 1, x \neq 0\}$. Alltså

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x - x^2} = 0 \text{ och } x \in D_{\text{ekv}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x(1-x)} = 0 \text{ och } x \in D_{\text{ekv}} \Leftrightarrow$$

$$[\text{Multiplicera ekvationen med MGN} = x(1-x)]$$

$$1 - x - 1 = 0 \text{ och } x \in D_{\text{ekv}} \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \text{ och } x \in D_{\text{ekv}}$$

Den sista raden (villkoret), innebär att både $x = 0$ och $x \in D_{\text{ekv}}$ skall vara uppfyllda. Detta gäller dock inte för något $x \in \mathbb{R}$. Vi har nämligen att $x = 0 \notin D_{\text{ekv}}$. Vi säger att $x = 0$ är en s.k. **falsk rot**, vilket alltså innebär att den givna ekvationen **saknar lösning**.

Svar: Ekvationen saknar lösning.

g) **Rotekvation** (den sökta variabeln, t.ex. x, förekommer under ett eller flera rottecken i ekvationen)

Här är idén att kvadrera, ev. flera gånger, så att vi får en ekvation som saknar kvadratrötter. Om vi i ekvationen i Ex 9g), se nedan, kvadrerar båda leden får vi villkoret $x - 3 = (5-x)^2$. *Men vi får precis samma villkor om vi kvadrerar ekvationen* $\sqrt{x-3} = -(5-x)$. Det betyder att det vid kvadreringen kan uppstå falska rötter, därav *implikationen* i första steget i lösningen till Ex 9g) nedan.

Ett annat enkelt exempel belyser att vi vid kvadreringen kan få falska rötter:
Anta att vi har villkoret (ekvationen) $x = -3$. Om vi kvadrerar får vi det nya villkoret (nya ekvationen) $x^2 = 9$, som har lösningarna $x = 3$ eller $x = -3$. Här är alltså $x = 3$ en falsk lösning till den ursprungliga ekvationen (villkoret) $x = -3$. Vi har alltså

$$x = -3 \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{(OBS!Inte ekvivalens!)}} \quad x^2 = 9$$

medan

$$x^2 = 9 \Leftrightarrow x = -3 \text{ eller } x = 3$$

9g) **Lösning**

$$\sqrt{x-3} = 5 - x \Rightarrow [\text{kvadrera}]$$

[OBS! Implikation – INTE ekvivalens]

$$x - 3 = (5-x)^2 \Leftrightarrow$$

$$x - 3 = 25 - 10x + x^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 11x + 28 = 0 \Leftrightarrow [\text{kvadratkomplettera}]$$

$$\left(x - \frac{11}{2}\right)^2 - \frac{121}{4} + \frac{112}{4} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x - \frac{11}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow$$

$$x - \frac{11}{2} = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{11}{2} + \frac{3}{2} = 7 \text{ eller } x = \frac{11}{2} - \frac{3}{2} = 4$$

Eftersom vi har ekvivalenser överallt ovan UTOM mellan första och andra raden, *kan falska rötter (lösningar) ha uppstått*. Det innebär att vi här måste vi pröva lösningarna i den *ursprungliga* ekvationen.

Med $x = 7$ får vi $\begin{cases} \text{VL} = \sqrt{7-3} = 2 \\ \text{HL} = 5 - 7 = -2 \end{cases}$, d.v.s. VL $\neq$ HL för $x = 7$. Alltså är $x = 7$ INTE lösning.

Med $x = 4$ får vi $\begin{cases} \text{VL} = \sqrt{4-3} = 1 \\ \text{HL} = 5 - 4 = 1 \end{cases}$, d.v.s. VL = HL för $x = 4$. Alltså är $x = 4$ lösning.

Svar: Ekvationen har (den enda) lösningen $x = 4$.

Alternativt resonemang till Ex 9g.
Vi söker först D_{ekv}, d.v.s. den mängd av reella tal för vilka alla termer i ekvationen samtidigt är definierade. Vi kan t.ex. resonera så här:

- VL i den ursprungliga ekvationen är definierad $\Leftrightarrow x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$.
- Eftersom VL ≥ 0 så måste HL vara ≥ 0, vilket innebär att $5 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 5$.

Alltså måste eventuella lösningar till ekvationen uppfylla båda dessa villkor. Alltså har vi

$$D_{\text{ekv}} = [3, \infty[\; \cap \;]-\infty, 5] = [3,5].$$

Lösningen till ekvationen kan nu skrivas (observera ekvivalensen mellan det första och det andra villkoret)

$$\sqrt{x-3} = 5 - x \text{ och } x \in [3,5] \Leftrightarrow$$
$$x - 3 = (5 - x)^2 \text{ och } x \in [3,5] \Leftrightarrow$$
$$x - 3 = 25 - 10x + x^2 \text{ och } x \in [3,5] \Leftrightarrow$$
$$x^2 - 11x + 28 = 0 \text{ och } x \in [3,5] \Leftrightarrow$$
$$\left(x - \frac{11}{2}\right)^2 - \frac{121}{4} + \frac{112}{4} = 0 \text{ och } x \in [3,5] \Leftrightarrow$$
$$\left(x - \frac{11}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = 0 \text{ och } x \in [3,5] \Leftrightarrow$$
$$x - \frac{11}{2} = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} \text{ och } x \in [3,5] \Leftrightarrow x = \frac{11}{2} - \frac{3}{2} = 4$$

Anm 1: Denna alternativa metod kan i det allmänna fallet eventuellt bli komplicerad om det t.ex. är svårt att finna D_{ekv} .
Anm 2: Observera att den falska lösningen $x = 7$ ”bortsorteras” i lösningens sista steg.

Svar: Ekvationen har lösningen $x = 4$.

h) T.ex. behöver ekvationen $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2} = 1$ kvadreras två gånger eftersom det vid den första kvadreringen uppkommer en dubbel produkt med kvadratrötter.

Efter första kvadreringen får vi

$$(x + 1) - 2\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-2} + (x - 2) = 1$$

Skriv om denna ekvation:

$$2x - 2 = 2\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-2}$$

som är ekvivalent med (dividera med $2 \neq 0$)

$$x - 1 = \sqrt{x + 1} \cdot \sqrt{x - 2}$$

Kvadrera igen:

$$x^2 - 2x + 1 = (x + 1)(x - 2)$$

etc.

Lös ekvationen fullständigt med angivande av implikationer och ekvivalenser. (Ekvationen har lösningen $x = 3$.)

c) Avstånd mellan punkter.

Avståndet d mellan två punkter $P_1 = (x_1, y_1)$ och $P_2 = (x_2, y_2)$ i ett ortonormerat koordinatsystem ges av

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Geometriskt bevis:

Exempel 10
Bestäm avståndet mellan punkterna (1,-3) och (-2,-5).

d) Cirkelns ekvation

En cirkel med medelpunkt i punkten (a, b) och vars radie är r har ekvationen

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Anm: Koordinatsystemet måste vara ortonormerat.

Sambandet följer direkt ur avståndsformeln ovan (se fig. 1.9 i FN).

Exempel 11

a) Bestäm ekvationen för en enhetscirkel med origo som medelpunkt.

b) Bestäm en ekvation för en cirkel vars medelpunkt är (1,-2) och vars radie är 3.

c) Bestäm medelpunkt och radie för den cirkel som har ekvationen $x^2 + y^2 + 6y + 5 = 0$.