TSRT09 – Reglerteori

Föreläsning 2: Beskrivning av linjära system

Daniel Axehill

Reglerteknik, ISY, Linköpings Universitet

Sammanfattning av Föreläsning 1

Signalstorlek:

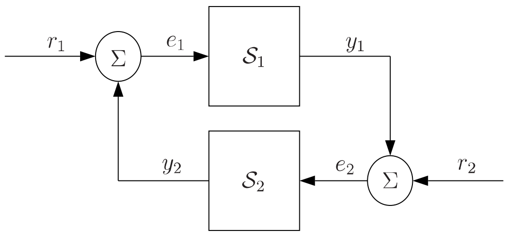
$$||z||_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} z^T(t)z(t)\ dt$$

Förstärkning hos systemet $\mathcal{S}$:

$$||\mathcal{S}|| = \sup_u \frac{||y||_2}{||u||_2}$$

Sammanfattning av Föreläsning 1, forts.

Lågförstärkningssatsen



Antag $\mathcal{S}_1$ och $\mathcal{S}_2$ stabila.
Insignal-utsignal-stabilt (ändlig förstärkning från r_1, r_2 till y_1, y_2) om

$$||\mathcal{S}_1||\ ||\mathcal{S}_2|| < 1$$

Sammanfattning av Föreläsning 1, forts.

Multivariabelt system med överföringsmatris $G(s)$:

$$\bar{\sigma}(G(i\omega)) = \text{största singulära värdet hos } G(i\omega)$$

Förstärkning $= \|G\|_\infty = \sup_\omega \bar{\sigma}(G(i\omega))$

och då gäller $\|y\|_2 \leq \|G\|_\infty \|u\|_2$.

Förutsättning: G har alla poler strikt i vänster halvplan.

DEL I: LINJÄRA SYSTEM

- Föreläsning 2
  1. Representation
  2. Egenskaper
- Föreläsning 3: Störningar
- Föreläsning 4: Kalmanfilter

DEL I: LINJÄRA SYSTEM

- Föreläsning 2
  1. Representation
  2. Egenskaper
- Föreläsning 3: Störningar
- Föreläsning 4: Kalmanfilter

Representation av linjära system

NYTT: u och y vektorer (skalärer i grundkursen)

- Impulssvar – Viktfunktion (skalär $\to$ matris)
- Överföringsmatris (skalär $\to$ matris)
- Tillståndsform

Tillståndsform med flera in- och utsignaler

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

B har flera kolonner. C har flera rader. D är en matris.

Samband med överföringsmatris

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Helt i analogi med grundkursen

Lösningen till tillståndsekvationen

$$\frac{d}{dt}x = Ax + Bu$$

har lösningen $x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau$.

Matrisexponentialfunktionen kan beräknas som

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left((sI - A)^{-1}\right), \quad \mathcal{L}^{-1} \text{ invers Laplacetransform}$$

Alternativt kan den beräknas från serieutvecklingen

$$e^{At} = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \cdots + \frac{t^k}{k!}A^k + \cdots$$

Helt i analogi med grundkursen

Styrbarhet och observerbarhet

x^* är *styrbart* om man kan välja $u(t)$ så att $x = 0$ styrs till $x = x^*$.
Systemet är styrbart om alla tillstånd är styrbara.
Omm systemet är styrbart kan $A - BL$ ges godtyckliga egenvärden.

x^* är *icke observerbart* (tyst) om, utsignalen är identiskt noll trots att $x(0) = x^*$, $(u(t) \equiv 0)$.
Systemet är observerbart om det saknar tysta tillstånd.
Innebär att x kan beräknas ur u, y (observatör).
Omm systemet är observerbart kan $A - KC$ ges godtyckliga egenvärden.

Helt i analogi med grundkursen

Styrbarhetsmatrisen

$$S = \begin{pmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix}, \quad (n = \dim x)$$

$\boxed{\text{Styrbarhet} \Leftrightarrow S \text{ har rang } n}$

- **Styrbart underrum**: det rum som spänns upp av kolonnerna i S. ''De tillstånd vi kan nå med insignalen $u(t)$''.

Helt i analogi med grundkursen

Observerbarhetsmatrisen

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}, \quad (n = \dim x)$$

$\boxed{\text{Observerbarhet} \Leftrightarrow \mathcal{O} \text{ har rang } n}$

Tyst underrum: nollrummet till $\mathcal{O}$. ''De tillstånd som inte syns i y''

Helt i analogi med grundkursen

$G(s)$, styr- och observerbarhet

Bara den styr- och observerbara delen av ett system syns i $G(s)$.
Ex:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

med överföringsmatrisen

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+1} \end{bmatrix}$$

x_2 är inte observerbar.

Helt i analogi med grundkursen

Stabiliserbarhet och detekterbarhet

- Ett system sägs vara *stabiliserbart* om det existerar en matris L sådan att $A - BL$ är stabil.
- Ett system sägs vara *detekterbart* om det existerar en matris K sådan att $A - KC$ är stabil.

Alltså: För att ett system ska vara stabiliserbart (detekterbart) måste ev. instabila egenvärden i A kunna modifieras med L (K).

Varför är egenvärdena till $A - BL$ av intresse?

Om systemet

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

återkopplas med

$$u = -Lx + w$$

blir det slutna systemet

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A - BL)x + Bw \\ y &= Cx \end{aligned}$$

$A - BL$ blir alltså slutna systemets "A-matris"!

I analogi med grundkursen

Varför är egenvärdena till $A - KC$ av intresse?

Om tillståndet för systemet

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

skattas med hjälp av observatören

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x})$$

så blir ekvationen för skattningsfelet $\tilde{x} = x - \hat{x}$

$$\dot{\tilde{x}} = (A - KC)\tilde{x}$$

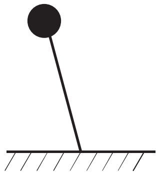
$A - KC$ blir alltså skattningsfelets "A-matris"!

I analogi med grundkursen

Exempel stabilitet: instabilt

- Inverterad pendel.
- Cykel.

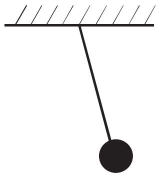
Kan i de här fallen stabiliseras!



Visa film!

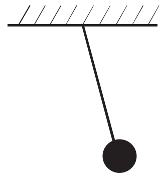
Exempel stabilitet: asymptotiskt stabilt

- Pendel med friktion i nedre läget.



Exempel stabilitet: stabilt

- Pendel utan friktion i nedre läget.



Stabilitet

Systemet

$$\dot{x} = Ax$$

är

- **stabilt** om det finns γ så $|x(t)| \leq \gamma|x(0)|$, $t \geq 0$, alla $x(0)$
- **asymptotiskt stabilt** om dessutom $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$, alla $x(0)$
- Asymp. stabilitet $\Leftrightarrow$ A:s alla egenvärden λ_j har Re$\lambda_j < 0$
- A har något egenvärde λ_j med Re$\lambda_j > 0 \Rightarrow$ instabilitet
- A:s alla egenvärden λ_j har Re$\lambda_j \leq 0$ och alla egenvärden på imag. axeln enkla $\Rightarrow$ stabilitet

Exakt som i grundkursen

BIBO-stabilitet

Systemet

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

är *insignal-utsignalstabilt* (BIBO-stabilt) om begränsat u ger begränsat y när $x(0) = 0$.
A:s alla egenvärden λ_j har Re$\lambda_j < 0 \Rightarrow$ insignal-utsignal-stabilitet.

Helt i analogi med grundkursen

Variabelbyte

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

överförs med variabelbytet $z = Tx$ till

$$\dot{z} = TAT^{-1}z + TBu$$
$$y = CT^{-1}z + Du$$

Helt i analogi med grundkursen

Intressanta speciella strukturer hos de transformerade matriserna

- Diagonalform
- Observerbar kanonisk form
- Styrbar kanonisk form

Diagonalform

Om A har skilda egenvärden kan T väljas så att TAT^{-1} blir diagonal.
Diagonalformen:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1m} \\ \beta_{21} & \dots & \beta_{2m} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{n1} & \dots & \beta_{nm} \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \dots & \gamma_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{p1} & \dots & \gamma_{pn} \end{pmatrix} x$$

Helt i analogi med grundkursen

Vad är nytt för flervariabla system?

På följande punkter skiljer sig flervariabla system väsentligt från system med skalärt u, skalärt y:

- När man vill gå från $G(s)$ till tillståndsbeskrivning. (Styr- och observerbara formerna är kluriga om *samtidigt* flera in- och utsignaler)
- När man vill ange polerna hos en överföringsfunktion.
- När man vill ange nollställena hos en överföringsfunktion.

Styrbar kanonisk form, skalära u, y

$$G(s) = \frac{c_1 s^{n-1} + \cdots + c_{n-1}s + c_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \cdots & c_n \end{pmatrix} x$$

Styrbar kanonisk form, skalärt u, vektor-y

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{c_{11}s^{n-1} + \cdots + c_{1n}}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n} \\ \vdots \\ \frac{c_{p1}s^{n-1} + \cdots + c_{pn}}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n} \end{bmatrix}$$

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{p1} & c_{p2} \dots & c_{pn} \end{pmatrix} x$$

Vektor-u, vektor-y: Svårt

Observerbar kanonisk form, skalära u, y

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} x$$

Observerbar kanonisk form, vektor-u, skalärt y

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{b_{11}s^{n-1}+\dots+b_{n1}}{s^n+a_1s^{n-1}+\dots+a_{n-1}s+a_n} & \dots & \frac{b_{1m}s^{n-1}+\dots+b_{nm}}{s^n+a_1s^{n-1}+\dots+a_{n-1}s+a_n} \end{bmatrix}$$

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ & & \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} x$$

Vektor-u, vektor-y: Svårt

Poler (till $G(s)$)

1. Tillståndsmatrisens egenvärden (för en styr- och observerbar realisering)
2. Om G(s) är given?
   Polpolynomet är minsta gemensamma nämnaren till alla underdeterminanter till G(s). Polerna är polpolynomets nollställen.
   Observera att vi på detta sätt får reda på ordningstalet för en minimal realisering!

Nollställen (till $G(s)$)

- Definition (G kvadratisk): Nollställespolynomet är täljaren till $\det G$ (normerad så att den har polpolynomet till nämnare)
- Definition (allmänt): Nollställespolynomet är största gemensamma delaren till täljarna till de maximala underdeterminanterna (normerade så att de har polpolynomet till nämnare)

Nollställen (till tillståndsbeskrivning)

z nollställe om $u = e^{zt}u_o$ svarar mot $y = 0$ (för lämpligt initialvärde).

Kriterium:

$$M(s) = \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -C & D \end{bmatrix}$$

tappar rang för $s = z$.

- Ger samma resultat som definitionen baserad på överföringsfunktion (förutsatt styr- och observerbar tillståndsrealisering).

Nollställen: fysikalisk tolkning

z nollställe om $u = e^{zt}u_o$ svarar mot $y = 0$.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

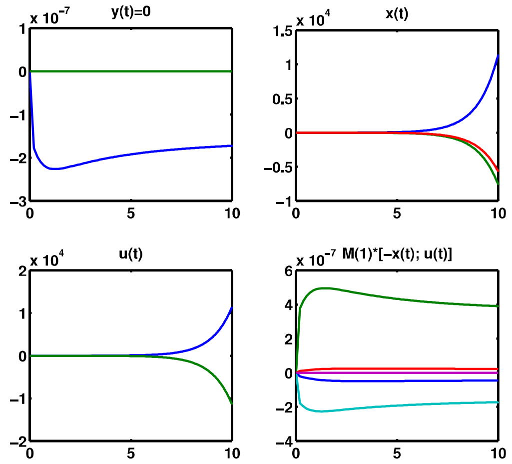
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

har nollställe i 1.

Det går att beräkna ett u_0 och ett initialtillstånd x_0 som ger $y = 0$ då $u = e^{zt}u_o$.

Nollställen: fysikalisk tolkning, forts.

Låt $u(t) = e^{1t}\begin{bmatrix}0.52 & -0.52\end{bmatrix}^T$ och $x_0 = \begin{bmatrix}0.52 & -0.35 & -0.26\end{bmatrix}^T$



Stabilitet...

Daniel Axehill

Reglerteori 2019, Föreläsning 2

www.liu.se

LINKÖPING UNIVERSITY