

TSKS21 Signaler, information & bilder

Föreläsning 4

Introduktion till signaler och system

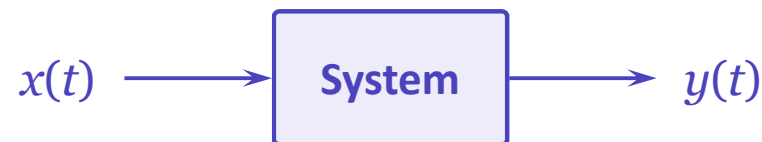
Mikael Olofsson

Institutionen för Systemteknik (ISY)

Ämnesområdet Elektroniska kretsar och system

Vad är signaler & system?

- Signaler: Mätbara fysikaliska storheter.
Spänningar, strömmar, tryck, flöden, temperaturer, bilder, ...
- System: Något som påverkas av signaler och som genererar signaler som svar.
Elektriska nät, mekaniska system, hydrauliska system, ekonomiska system, bildbehandling, ...



- Signaler & System: En teori för att analysera just signaler och system.
Differential- och differensekvationer, faltning, transformer

Var har man nytta av signaler & system?

- Telekommunikation
Filtrering, modulation, estimering, equalizing, ...
- Reglerteknik
Modellering, styrning, återkoppling,...
- Signalbehandling
Spektralanalys, detektion, ...
- Bildbehandling
Flerdimensionell filtrering, detektion av objekt, ...
- Elektronik
Filter, implementering av allt ovan, ...

Klassificering av signaler – grunder

Deterministisk – Stokastisk

$$x(t) = e^{-t^2}$$

Okända signaler
brus

Endimensionell – Flerdimensionell

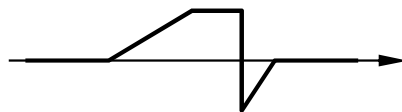
$$x(t)$$

$$x(a, b, c)$$

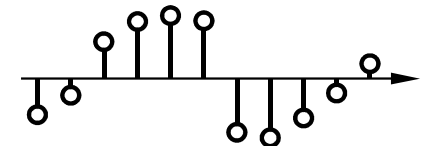
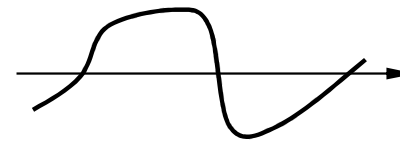
Periodisk – Ickeperiodisk



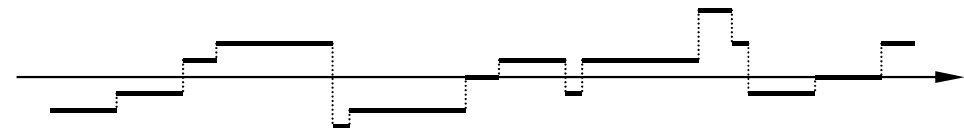
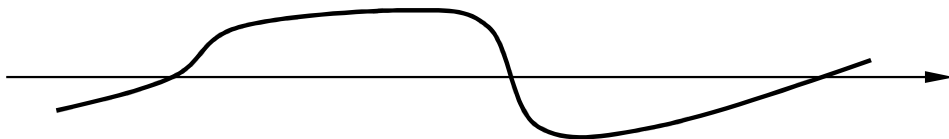
$$x(t+T) = x(t)$$



Tidskontinuerlig – Tidsdiskret



Amplitudkontinuerlig – Amplituddiskret



Klassificering av signaler – analog/digital

Deterministisk – Stokastisk

$$x(t) = e^{-t^2}$$

Okända signaler
brus

Endimensionell – Flerdimensionell

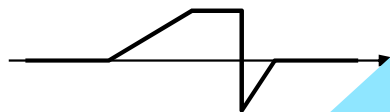
$$x(t)$$

$$x(a, b, c)$$

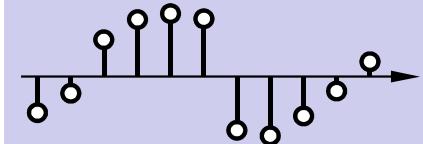
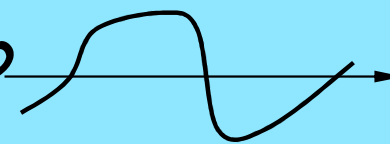
Periodisk – Ickeperiodisk



$$x(t+T) = x(t)$$

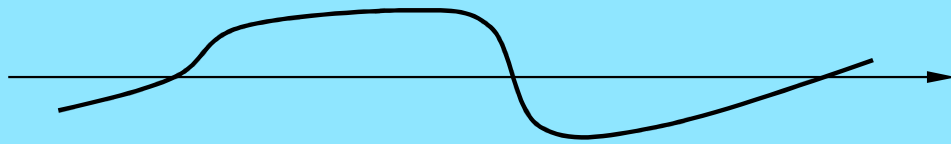


Tidskontinuerlig – Tidsdiskret

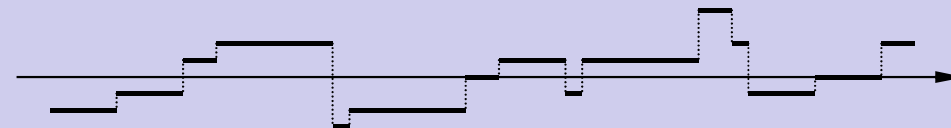


Analog

Amplitudkontinuerlig



Amplituddiskret



Digital

Klassificering av signaler – signaler & system

Deterministisk – Stokastisk

$$x(t) = e^{-t^2}$$

Okända signaler
brus

Signalteori

Endimensionell – Flerdimensionell

$$x(t)$$

$$x(a, b, c)$$

Bildbehandling

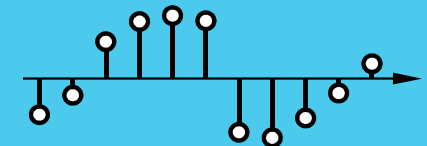
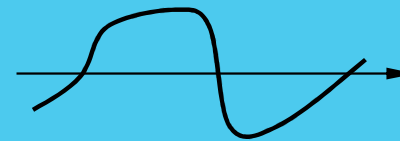
Periodisk – Ickeperiodisk



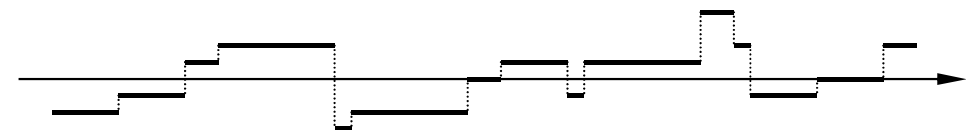
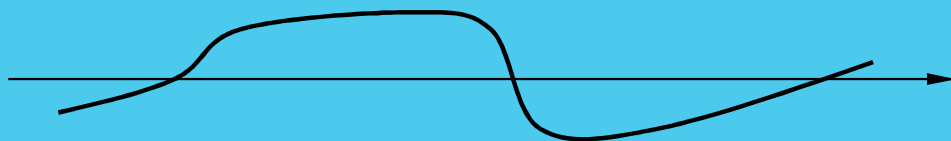
$$x(t+T) = x(t)$$



Tidskontinuerlig – Tidsdiskret



Amplitudkontinuerlig – Amplituddiskret



Digitala filter

Klassificering av signaler – denna kurs

Deterministisk

$$x(t) = e^{-t^2}$$

Stokastisk

Okända signaler
brus

Signalteori

Endimensionell

$$x(t)$$

Flerdimensionell

$$x(a, b, c)$$

Bildbehandling

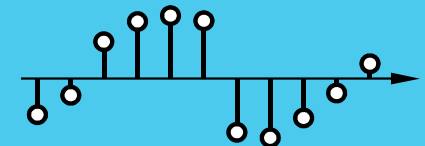
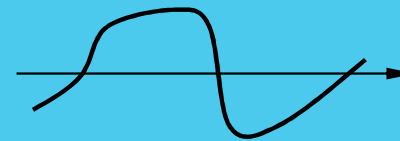
Periodisk – Ickeperiodisk



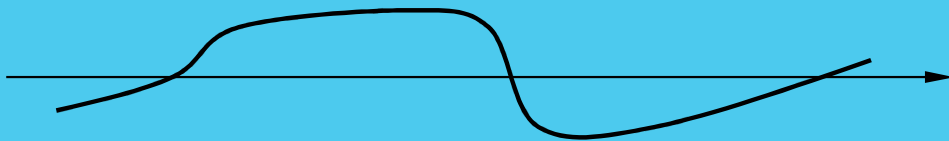
$$x(t+T) = x(t)$$



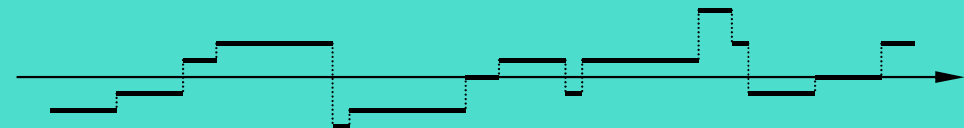
Tidskontinuerlig – Tidsdiskret



Amplitudkontinuerlig



Amplituddiskret



Digitala filter

Fundamentala signaler i kontinuerlig tid

Komplex exponential: $e^{j2\pi f_0 t} = \cos(2\pi f_0 t) + j \sin(2\pi f_0 t)$

Enhetssteg: $u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$

Enhetsimpuls: $\delta(t): \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t) dt = x(0)$

Egenskaper: $\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$ $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau) d\tau$

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \quad \delta(t) = \frac{d}{dt} u(t)$$

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$$

Speciella utsignaler

Impulssvar:



Stegsvar:



Allmänt:



Klassificering av system

– hjälp att beskriva utsignal givet insignal

För att kunna säga något om utsignalen från ett system, så behöver vi en beskrivning av systemet. Utifrån sådana beskrivningar kan vi klassificera system.

- Linjäritet: Bevarar linjärkombinationer.
- Tidsinvarians: Uppför sig likadant hela tiden.
- LTI: Linjär och tidsinvariant.
- Kausala system: Känner inte till framtiden.
- Antikausala: Känner inte till historien.
- Ickekausala: Behöver känna till både historien och framtiden.
- Stabila system: Uppför sig kontrollerat.
- Marginellt stabila system: Uppför sig nästan kontrollerat.
- Instabila system: Uppför sig okontrollerat.

Linjära system

– bevarar linjärkombinationer

Ett system är **linjärt** om en linjärkombination av insignaler resulterar i motsvarande linjärkombination av utsignaler. Detta måste gälla för alla insignaler och alla linjärkombinationer.

$$\left. \begin{array}{l} x_1(t) \rightarrow y_1(t) \\ x_2(t) \rightarrow y_2(t) \end{array} \right\} \Rightarrow ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow ay_1(t) + by_2(t)$$

Exempel linjärt:

$$\begin{array}{ll} y(t) = x(t-3) & y(t) = \frac{d}{dt} x(t) \\ y(t) = x(t^2) & y(t) = x(t) \cos(\omega t) \\ y(t) = x(-t) & y(t) = t x(t) \end{array}$$

Exempel icke linjärt:

$$\begin{array}{l} y(t) = x^2(t) \\ y(t) = 1/x(t) \end{array}$$

Tidsinvarianta system

– uppför sig alltid likadant

Ett system är **tidsinvariant** om en fördröjning av dess insignal resulterar i motsvarande fördröjning av dess utsignal. Detta måste gälla för alla insignaler och alla fördröjningar. (Motsatsen kallas **tidsvariabel**.)

$$x(t) \rightarrow y(t) \quad \Rightarrow \quad x(t - \tau) \rightarrow y(t - \tau)$$

Exempel tidsinvariant:

$$y(t) = x(t - 3) \quad y(t) = \frac{d}{dt} x(t)$$

$$y(t) = x^2(t) \quad y(t) = 1/x(t)$$

Exempel tidsvariabelt:

$$y(t) = x(t) \cos(\omega t) \quad y(t) = x(-t)$$

$$y(t) = t x(t) \quad y(t) = x(t^2)$$

LTI

– Linjär och tidsinvariant

Ett system kallas **LTI** om det är både linjärt (L) och tidsinvariant (TI).

$$\left. \begin{array}{l} x_1(t) \rightarrow y_1(t) \\ x_2(t) \rightarrow y_2(t) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_1 x_1(t - \tau_1) + a_2 x_2(t - \tau_2) \\ \quad \quad \quad \searrow \\ a_1 y_1(t - \tau_1) + a_2 y_2(t - \tau_2) \end{array}$$

Exempel LTI:

$$y(t) = x(t - 3)$$

$$y(t) = \frac{d}{dt} x(t)$$

Exempel icke-LTI:

$$y(t) = x^2(t) \quad y(t) = 1/x(t)$$

$$y(t) = x(t^2) \quad y(t) = x(-t)$$

$$y(t) = t x(t) \quad y(t) = x(t) \cos(\omega t)$$

Faltning

Faltningen av signalerna $a(t)$ och $b(t)$:
$$(a * b)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\tau)b(t - \tau)d\tau$$

Egenskaper:

Bilinjär: Fixera en av dem, linjär m.a.p. den andra.

Kommutativ: $(a * b)(t) = (b * a)(t)$

Associativ: $((a * b) * c)(t) = (a * (b * c))(t)$

Konvergens: Om $\int_{-\infty}^{\infty} |a(t)| dt$ är konvergent och $b(t)$ ändlig.
...eller tvärt om.

Utsignal från ett LTI-system



$$y(t) = H\{x(t)\} = H\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right\}$$

Linjäritet:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)H\{\delta(t-\tau)\}d\tau$$

Tidsinvarians:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = (x * h)(t)$$

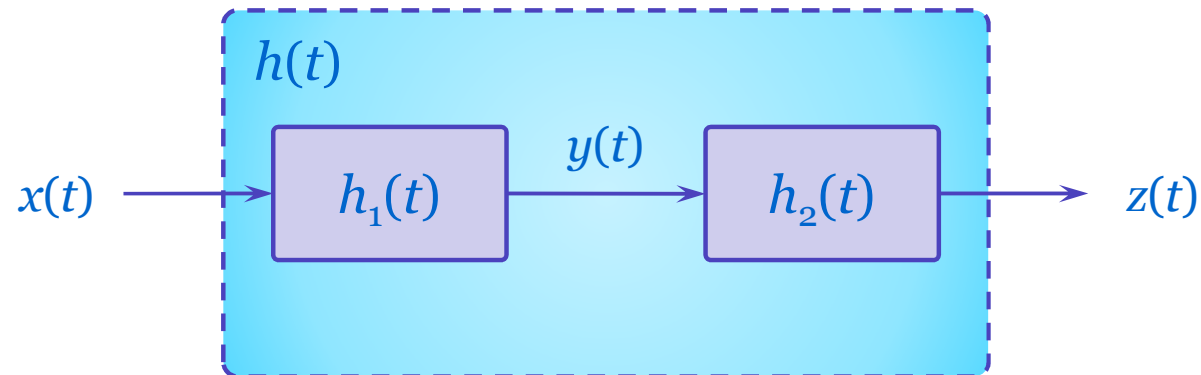
Stegsvar:

$$g(t) = (u * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^t h(\tau)d\tau$$

Mikael Olofsson
ISY/KS

www.liu.se

Kaskadkopplade LTI-system



Ett system bestående av LTI-system är ett LTI-system.

$$\begin{aligned} y(t) &= (x * h_1)(t) \\ z(t) &= (y * h_2)(t) \end{aligned} \quad \begin{array}{c} \text{associativitet} \\ \downarrow \end{array} \quad \begin{aligned} &= ((x * h_1) * h_2)(t) \\ &= (x * (h_1 * h_2))(t) \end{aligned}$$

$$\text{Identifiera i } z(t) = (x * h)(t) \quad \Rightarrow \quad h(t) = (h_1 * h_2)(t)$$

Kausala system

– Känner inte till framtiden

Ett system är **kausalt** om dess utsignal inte beror på framtida värden hos insignalen. Detta ska gälla för alla insignaler och alla tidpunkter.

Exempel på kausala system:

$$\left. \begin{aligned} y(t) &= x(t)\cos(\omega t) \\ y(t) &= x^2(t)\cos(\omega t) \end{aligned} \right\} \text{ – även momentana}$$

$$\left. \begin{aligned} y(t) &= x(t-3) \\ y(t) &= x^2(t-3) \\ y(t) &= \int_{t-1}^t x(\tau) d\tau \end{aligned} \right\} \text{ – även dynamiska}$$

Antikausala system

– Känner inte till historien

Ett system är **antikausalt** om dess utsignal inte beror på historiska värden hos insignalen. Detta ska gälla för alla insignaler och alla tidpunkter.

Exempel på antikausala system:

$$\left. \begin{aligned} y(t) &= x(t)\cos(\omega t) \\ y(t) &= x^2(t)\cos(\omega t) \end{aligned} \right\} \text{ – även momentana}$$

$$\left. \begin{aligned} y(t) &= x(t+3) \\ y(t) &= x^2(t+3) \\ y(t) &= \int_t^{t+1} x(\tau) d\tau \end{aligned} \right\} \text{ – även dynamiska}$$

Allmänt ickekausala system

- Känner både till historien och framtiden

Ett system som varken är kausalt eller antikausalt kallas **allmänt ickekausalt**.

Allmänt ickekausala system är dynamiska.

Exempel på allmänt ickekausala system :

$$y(t) = x(t+3) + x(t-3)$$

$$y(t) = x^2(t+3) - x(t-3)$$

$$y(t) = \frac{1}{2} \int_{t-1}^{t+1} x(\tau) d\tau$$

Stabila system

– uppför sig på ett kontrollerat sätt

Ett system kallas **stabilt** (BIBO-stabilt) om en ändlig insignal resulterar i en ändlig utsignal. Detta ska gälla för alla ändliga insignaler och alla tidpunkter.

$$|x(t)| < M \quad \forall t \quad \Rightarrow \quad |y(t)| < N \quad \forall t$$

Exempel stabilt:

$$y(t) = x(t-3) \quad y(t) = x(-t)$$

$$y(t) = x^2(t) \quad y(t) = x(t^2)$$

$$y(t) = x(t) \cos(\omega t)$$

Exempel ickestabilt:

$$y(t) = \frac{d}{dt} x(t) \quad y(t) = 1/x(t)$$

$$y(t) = t x(t)$$

Marginellt stabilt

- ett specialfall av ickestabilt

Ickestabila system kan delas in i två typer – strikt ickestabila och marginellt stabila. Ett **marginellt stabilt** system uppför sig som om det vore stabilt för vissa begränsade insignaler, men inte för andra.

Exempel marginellt stabila system:

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

$$y(t) = \frac{d}{dt} x(t)$$

Kausalitet och stabilitet för LTI-system

Ett LTI-system är fullständigt beskrivet av sitt impulssvar.

$$\text{Kausalitet} \quad \Leftrightarrow \quad h(t) = 0, \quad t < 0 \quad \Leftrightarrow \quad g(t) = 0, \quad t < 0$$

$$\text{Antikausalitet} \quad \Leftrightarrow \quad h(t) = 0, \quad t > 0$$

$$\text{Stabilitet} \quad \Leftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt \text{ konvergent (absolutintegrerbart)}$$

$$\begin{aligned} \text{Marginell stabilitet} \quad &\Leftrightarrow \quad |h(t)| < M \text{ (ändlig)} \\ &\text{och} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt \text{ ickekonvergent} \end{aligned}$$

Sinus in – sinus ut - principen

För LTI-system har vi:

Sinus in – Sinus ut (samma frekvens)

Jämför med partikulärlösningen av en differentialekvation.

Också: $j\omega$ -metoden.

Linjäritet implicerar:

$$\sum \text{Sinus in} - \sum \text{Sinus ut}$$

Önskvärt:

Beskriv signaler i termer av sinussignaler.

Beskriv system i termer av vad de gör med sinussignaler.

Detta tar oss till: Fourierserier och Fouriertransformer