Svar till kontrollskrivning i TNA006, 150929

1. (a) Tangentplanet har en normalvektor $\nabla f(1,-1,0)$.

$$\nabla f(x,y,z) = (2x, 3y^2, -4z^3), \quad \nabla f(1,-1,0) = (2,3,0).$$

Då tangentplanet innehåller punkten $(1,-1,0)$ får vi.

Svar: Tangentplanet ges av

$$2(x-1) + 3(y+1) = 0.$$

(b) Stationära punkter ges av att $\nabla f(x,y,z) = (2x, 3y^2, -4z^3) = (0,0,0)$. Enda lösningen är $x = y = z = 0$. I en omgivning av origo ser vi att f kan anta både positiva och negativa värden, det är alltså en sadelpunkt.

Svar: En stationär punkt $(0,0,0)$ som är en sadelpunkt.

2. (a) Vi byter till polära koordinater, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

$$\frac{x^2y}{x^2+y^2+xy} = \frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^2+r^2\cos\theta\sin\theta} = \frac{r\cos^2\theta\sin\theta}{1+\cos\theta\sin\theta} =$$

$$\frac{r\cos^2\theta\sin\theta}{1+\frac{1}{2}\sin(2\theta)} = r\frac{\cos^2\theta\sin\theta}{1+\frac{1}{2}\sin(2\theta)} \to 0,\ r \to 0.$$

Slutsatsen får vi ty, nämnaren $1 + \frac{1}{2}\sin(2\theta) \geq \frac{1}{2} > 0$, vilket ger att

$$\frac{\cos^2\theta\sin\theta}{1+\frac{1}{2}\sin(2\theta)}$$

är en begränsad funktion.

Svar: Gränsvärdet existerar och

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2+xy} = 0.$$

(b) Vi har att

$$f(0,1) = 0, \quad f'_x(0,1) = 1, \quad f'_y(0,1) = 0.$$

För att avgöra om f är differentierbar får vi undersöka $\rho(h,k)$:

$$\frac{f(h,1+k) - f(0,1) - hf'_x(0,1) - f'_y(0,1)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{h^2(1+k) + h(1+k) - h}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\frac{h^2+h^2k+hk}{\sqrt{h^2+k^2}} = \Big[P.K.\Big] \frac{r^2\cos^2\theta + r^3\cos^2\theta\sin\theta + r^2\cos\theta\sin\theta}{r} =$$

$$r\Bigg(\cos^2\theta + r\cos^2\theta\sin\theta + \cos\theta\sin\theta\Bigg) \to 0, \quad r \to 0.$$

Ty, uttrycket inom parentesen är begränsat, om vi låter tex $r < 1$. Vi har alltså att $\rho(h,k) \to 0$ då $r \to 0$ alltså får vi att

Svar: Funktionen f är differentierbar i punkten $(0,1)$.

3. Kedjeregeln ger att:

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 2xz'_u - xe^{-x^2/2}z'_v.$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 2yz'_u.$$

Detta ger i PDEn:

$$yz'_x - xz'_y = 2xyz'_u - xye^{-x^2/2}z'_v - 2xyz'_u = -xye^{-x^2/2}z'_v$$

Vi får

$$-xye^{-x^2/2}z'_v = xy \quad \Leftrightarrow \quad z'_v = -\frac{1}{v}.$$

Vilket ger att $z = -\ln|v| + g(u)$, och $z = -\ln e^{-x^2/2} + g(x^2+y^2)$.

Svar: Lösningarna är $z(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + g(x^2+y^2)$.

4. Låt $F(x,y,z) = xy\cos z - z$. Vi har att $F'_z = -xy\sin z - 1$ och $F'_z(1,0,0) = -1 \neq 0$. Detta ger att det finns en sådan funktion $z(x,y)$.

Vi ser också att $z(1,0) = 0$. För derivatorna deriverar vi implicit m.a.p. x.

$$\frac{\partial}{\partial x}\Bigg(xy\cos z - z\Bigg) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y\cos z - xyz'_x\sin(z) - z'_x = 0$$

I punkten $(1,0,0)$ får vi då att $z'_x(1,0) = 0$. Derivera implicit m.a.p. y.

$$\frac{\partial}{\partial y}\Bigg(xy\cos z - z\Bigg) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\cos z - xyz'_y\sin(z) - z'_y = 0$$

I punkten $(1,0,0)$ får vi då att $z'_y(1,0) = 1$.

Svar: Det finns en sådan funktion $z(x,y)$ i en omgivning av $(1,0,0)$ och

$$z(1,0) = 0, \quad z'_x(1,0) = 0, \quad z'_y(1,0) = 1.$$