

TNA001- Matematisk grundkurs

Tentamen 2016-01-04 - Lösningsskiss

1. a) Uttrycket är definierat $\Leftrightarrow \frac{2x-1}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow$ gör teckenschema $x \in]-\infty, -2[\cup \left[\frac{1}{2}, \infty\right[$

Svar: $x \in]-\infty, -2[\cup \left[\frac{1}{2}, \infty\right[$

b) Definition för $-1 \leq x - 2 \leq 1$ och $-1 \leq 3x + 7 \leq 1$, där den första olikheten gäller om $1 \leq x \leq 3$ och den andra om $2 \leq x \leq \frac{8}{3}$. Vi söker snittmängden av dessa intervall och får $x \in \left[2, \frac{8}{3}\right]$.

Svar: $x \in \left[2, \frac{8}{3}\right]$

2a) Ekvationens termer är definierade $\Leftrightarrow x \in]2, \infty[\cap]1, \infty[=]2, \infty[$

Alltså skall vi lösa ekvationen under förutsättningen att $x > 2$. Vi får

$$\ln(x-2) + \ln(x-1) = 2 \ln 3, x > 2 \Leftrightarrow \ln((x-2)(x-1)) = \ln 9, x > 2 \Leftrightarrow [\text{ty-funktionen är omvändbar}]$$

$$(x-2)(x-1) = 9, x > 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 7 = 0, x > 2 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{37}}{2}, x > 2 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{37}}{2}$$

$$\text{ty } \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{37}}{2} < \frac{3}{2} - \frac{6}{2} < 2 \text{ och } \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{37}}{2} > \frac{3}{2} + \frac{6}{2} > 2.$$

Svar: $x = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{37}}{2}$

b)

$$(x+1)^3 \geq x+1 \Leftrightarrow (x+1)^3 - (x+1) \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)((x+1)^2 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(x+1)(x^2 + 2x) \geq 0 \Leftrightarrow x(x+1)(x+2) \geq 0 \Leftrightarrow [\text{teckenschema}] \Leftrightarrow x \in [-2, -1] \cup [0, \infty[$$

Svar: $x \in [-2, -1] \cup [0, \infty[$

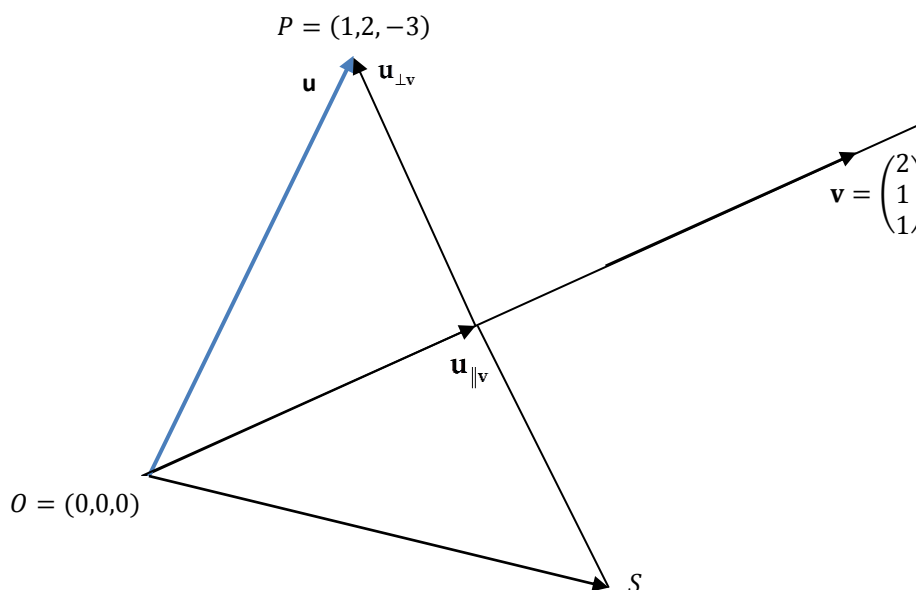
3. a) Eftersom planet är ortogonalt mot den givna linjen är planets normal lika med linjens riktning, d.v.s.

vi har $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Eftersom punkten $(-1, 0, 2)$ ligger i planet ger oss punkt-normalformen för planets

$$2(x - (-1)) + 1(y - 0) + 1(z - 2) = 0 \Leftrightarrow 2x + y + z = 0$$

Svar: Planets ekvation på normalform är $2x + y + z = 0$.

b) Vi har linjens ekvation: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ och ritat en skiss för speglingen.



observerar att origo ligger på linjen och söker koordinaterna för punkten S . Vi behöver då den riktade sträckan

$$\overrightarrow{OS} = \mathbf{u} - 2\mathbf{u}_{\perp v} = \mathbf{u} - 2(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\parallel v}) = 2\mathbf{u}_{\parallel v} - \mathbf{u},$$

där vi har $\mathbf{u} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Av projektnsformeln får vi

$$\mathbf{u}_{\parallel v} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

och därmed

$$\overrightarrow{OS} = \frac{2}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

vilket ger oss

$$S = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{10}{3}\right).$$

Svar: Den ortogonala projektionen av punkten P på linjen är punkten $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{10}{3}\right)$.

4.

$$\begin{aligned} \left((1 - i\sqrt{3}) \cdot (2e^{i\frac{\pi}{4}})^2\right)^{36} &= \left(2e^{-i\frac{\pi}{3}} \cdot 4e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{36} = (2^3)^{36} \cdot \left(e^{-i\frac{\pi}{3} + i\frac{\pi}{2}}\right)^{36} = \\ &= 2^{108} \cdot \underbrace{\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{36}}_{=1} = 2^{108} e^{i6\pi} = 2^{108} \end{aligned}$$

a) **Svar:** 2^{108}

b) Villkoret $|z - 2| \leq 2$ innebär att z ligger på cirkelskivan med radie 2 och medelpunkt i $(2,0)$, d.v.s. $z = x + iy$, där $x = \operatorname{Re} z$ och $y = \operatorname{Im} z$, uppfyller villkoret

$$(x - 2)^2 + y^2 \leq 4.$$

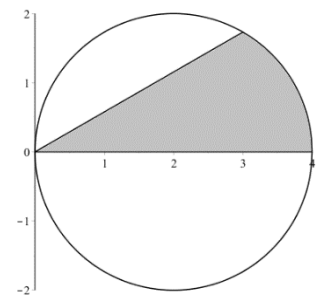
Om vi här sätter in villkoret $\arg \theta = 0$ (strålen $\theta = 0$), som vi kan skriva som linjen $y = 0$, så får vi $x = 0$ eller $x = 4$. d.v.s. strålen $\theta = 0$ skär cirkelns rand i origo och i punkten $(4,0)$.

P.s.s. om vi låter $\arg \theta = \frac{\pi}{6}$ (strålen $\theta = \frac{\pi}{6}$), som vi kan skriva som linjen $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$, så får vi villkoret för skärningspunkternas x -koordinater

$$(x - 2)^2 + \frac{x^2}{3} = 4 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = 0 \text{ eller } x = 3$$

som ger oss skärningspunkterna $(0,0)$ respektive $(3, \sqrt{3})$.

Svar: Det sökta området är skuggat i figuren. De eftersökta skärningspunkterna är $(0,0)$ – båda strålarna, $(4,0)$ – strålen $\theta = 0$ och $(3, \sqrt{3})$ – strålen $\theta = \frac{\pi}{6}$.



5. a)

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) - \sin 3x = 0 \Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \Leftrightarrow$$

$$3x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - 3x + 2n\pi \text{ eller } 3x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} + 3x + 2n\pi$$

Här saknar det sista villkoret lösning i x , medan det första villkoret gäller för

$$x = \frac{\pi}{9} + n \cdot \frac{\pi}{3}$$

Svar: $x = \frac{\pi}{9} + n \cdot \frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$.

b) $f(x) = \sqrt{\arctan(2x-1)}$ är definierat om $2x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$, vilket innebär att $f(x) \in \left[0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right]$.

För att finna en eventuell invers löser vi ut x ur

$$y = \sqrt{\arctan(2x-1)}, x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow y^2 = \arctan(2x-1), x \geq \frac{1}{2}, y \in \left[0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right] \Leftrightarrow$$

$$2x-1 = \tan y^2, y \in \left[0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right] \Leftrightarrow x = \frac{1 + \tan y^2}{2}, y \in \left[0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right]$$

Svar: f invers med $f^{-1}(x) = \frac{1 + \tan x^2}{2}, x \in \left[0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right]$.

6. a)

$$\sum_{k=1}^n (4k+6) \geq 20\,000 \Leftrightarrow [\text{aritmetisk summa}]$$

$$\frac{n(10+4n+6)}{2} \geq 20\,000 \Leftrightarrow 8n+2n^2 \geq 20\,000 \Leftrightarrow n^2+4n-10\,000 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(n+2)^2 - 10\,004 \geq 0 \Leftrightarrow \left((n+2) - \sqrt{10\,004}\right) \left((n+2) + \sqrt{10\,004}\right) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(n - (-2 + \sqrt{10\,004}))(n - (-2 - \sqrt{10\,004})) \geq 0 \Leftrightarrow [\text{OBS! } n > 0]$$

$$n \geq -2 + \sqrt{10\,004} > -2 + 100 = 98$$

Eftersom n är ett positivt heltal gäller olikheten om $n \geq 99$

Svar: Minsta positiva heltalet för vilket olikheten gäller är $n = 99$.

b) Binomialutveckling ger

$$\left(\frac{1}{x} - x^3\right)^{20} = \sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k} \left(\frac{1}{x}\right)^{20-k} \cdot (-x^3)^k = \sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k} \left(\frac{1}{x}\right)^{20-k} \cdot (-1)^k \cdot x^{3k} =$$

$$\sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k} \cdot (-1)^k \cdot x^{k-20+3k} = \sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k} \cdot (-1)^k \cdot x^{4k-20}$$

Den konstanta termen fås då $4k-20=0 \Leftrightarrow k=5$, vilket ger oss den konstanta termen

$$\binom{20}{5} \cdot (-1)^5 = -\frac{20!}{15! \cdot 5!} = -\frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = -15\,504$$

Svar: $-15\,504$

7. Vi låter först $n=1$. Vi får då

$$VL(1) = \sum_{k=1}^1 3(1-tk)^2 = 3(1-t)^2$$

medan

$$HL(1) = 16 \cdot 1^3 + 12 \cdot 1^2 - 1 = 27$$

Alltså måste t uppfylla villkoret

$$3(1-t)^2 = 27 \Leftrightarrow t = 4 \text{ eller } t = -2$$

För $n=2$ får vi

$$HL(2) = 16 \cdot 2^3 + 12 \cdot 2^2 - 2 = 128 + 48 - 2 = 174$$

Om nu $t = -2$ får vi med $n=2$

$$VL(2) = \sum_{k=1}^2 3(1+2k)^2 = 3(1+2)^2 + 3(1+4)^2 = 27 + 75 = 102 \neq 174 = HL(2)$$

Alltså gäller inte sambandet för alla $n \in \mathbb{Z}^+$ om $t = -2$.

Om $t = 4$ får vi med $n = 2$:

$$VL(2) = \sum_{k=1}^2 3(1-4k)^2 = 3(1-4 \cdot 1)^2 + 3(1-4 \cdot 2)^2 = 27 + 147 = 174 = HL(2)$$

Alltså gäller sambandet för $n = 1$ och $n = 2$ om $t = 4$.

Vi visar nu med induktion att sambandet gäller för alla $n \in \mathbb{Z}^+$ om $t = 4$.

Steg I: Vi vet enligt ovan att sambandet gäller för $n = 1$ (och $n = 2$).

Steg II: Antag att sambandet gäller för ett godtyckligt fixt $p \in \mathbb{Z}^+$, d.v.s. vi antar att

$$VL(p) = \sum_{k=1}^p 3(1-4k)^2 = 16p^3 + 12p^2 - p = HL(p)$$

Detta medför att

$$\begin{aligned} VL(p+1) &= \sum_{k=1}^{p+1} 3(1-4k)^2 = \left(\sum_{k=1}^p 3(1-4k)^2 \right) + 3 \underbrace{(1-4(p+1))^2}_{=3(-3-4p)^2} = [\text{enligt antagandet}] = \\ &= 16p^3 + 12p^2 - p + 3(-3-4p)^2 = 16p^3 + 12p^2 - p + 27 + 72p + 48p^2 = 16p^3 + 60p^2 + 71p + 27 \end{aligned}$$

Vi har också

$$\begin{aligned} HL(p+1) &= 16(p+1)^3 + 12(p+1)^2 - (p+1) = 16(p^3 + 3p^2 + 3p + 1) + 12(p^2 + 2p + 1) - p - 1 = \\ &= 16p^3 + 60p^2 + 71p + 27 \end{aligned}$$

Därmed har vi visat att om $VL(p) = HL(p)$ så gäller det att $VL(p+1) = HL(p+1)$

Steg III

Påståendet gäller enligt Steg I för $n = 1$. Enligt Steg II gäller det då även för $n = 1 + 1 = 2$. Då gäller det även för $n = 2 + 1 = 3$ o.s.v. Via matematisk induktion gäller påståendet för alla $n \in \mathbb{Z}^+$ om $t = 4$ v.s.v.

Svar: Sambandet gäller för alla $n \in \mathbb{Z}^+$ om $t = 4$.