Kortfattade lösningar till tentamen i TSRT22, TSRT19 Reglerteknik

Tentamensdatum: 23 oktober 2021

1. (a) Överföringsfunktionen kan skrivas om enligt

$$G(s) = \frac{\beta}{s+\alpha} = \frac{k}{Ts+1}$$

där $k = \beta/\alpha$ och $T = 1/\alpha$. Stegsvaret når 63 % av slutvärdet efter ca 1/3 sekund, d v s $T = 1/3$, vilket ger $\alpha = 3$. Insignalens amplitud är fem, vilket gör att stegsvaret går mot $5 \cdot k$. Figuren visar att stegsvaret går mot 10 vilket innebär att $k = 2$ vilket ger $\beta = 6$.

Svar:

$$G(s) = \frac{6}{s+3}$$

(b) Systemets statiska förstärkning är $G(0) = \beta/a_2$ och insignalen är ett steg med amplitud ett, vilket ger att utsignalen går mot β/a_2. Figuren visar att utsignalen går mot två vilket innebär att alternativen III, IV och V kan strykas. Systemets poler bestäms av ekvationen

$$s^2 + a_1 s + a_2 = 0$$

vilket ger polerna

$$I : s = -1/2 \pm i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$II : s = -1, -1$$

och eftersom stegsvaret har en översläng kan fall II med reella poler uteslutas.

Svar: Fall I är korrekt.

(c) Insignalen $u(t) = 2 \sin \omega t$ ger utsigalen

$$y(t) = 2 \mid G(i\omega) \mid \sin(\omega t + \phi) = 2 \mid G(i\omega) \mid \sin \omega(t + \phi/\omega)$$

där

$$\mid G(i\omega) \mid = \frac{k}{\sqrt{(\omega\tau)^2 + 1}} \qquad \arg G(i\omega) = -\arctan \omega\tau$$

Figuren ger att signalernas periodtid är ca 3.1 sek, vilket ger vinkelfrekvensen $\omega \approx 2$. Tidsförskjutningen mellan in och utsignal är ca 0.4 sek, och $y(t)$ ligger “efter” $u(t)$, vilket ger att $\phi/2 = -0.4$, vilket ger att $\phi = -0.8$. Detta ger

$$\arg G(i\omega) = -\arctan \omega\tau = -0.8$$

vilket, med $\omega = 2$, ger $\tau \approx 0.5$. Utsignalens amplitud är $2\cdot \mid G(i \cdot 2) \mid$ och figuren ger att

$$2 \mid G(i \cdot 2) \mid = 2 \frac{k}{\sqrt{(2 \cdot 0.5)^2 + 1}} = 5.8$$

vilket ger

$$k = \sqrt{2} \cdot 2.9 \approx 4$$

Svar:

$$G(s) = \frac{4}{0.5s + 1}$$

2. (a) Blockschemat ger (med $r(t) = 0$)

$$E(s) = -Y(s) = -G(s)(F(s)E(s) + V(s)) = -F(s)G(s)E(s) - G(s)V(s)$$

vilket ger

$$E(s)(1 + F(s)G(s)) = -G(s)V(s)$$

och

$$E(s) = \frac{-G(s)}{1 + F(s)G(s)}V(s)$$

Överföringsfunktionen från störningen till reglerfelet ges av

$$G_V(s) = \frac{-G(s)}{1 + F(s)G(s)}$$

Med insatta uttryck för $G(s)$ och $F(s)$ fås

$$G_V(s) = -\frac{1}{s^2 + s + K}$$

Svar: Överföringsfunktionen från störningen till reglerfelet ges av

$$G_V(s) = -\frac{1}{s^2 + s + K}$$

(b) En sinusformad störning ger att relerfelet kommer att bli en sinussignal på formen

$$e(t) =\mid G_V(i\omega) \mid \sin(\omega t + \phi)$$

där

$$\mid G_V(i\omega) \mid = \frac{1}{\mid -\omega^2 + i\omega + K \mid} = \frac{1}{\sqrt{(K - \omega^2)^2 + \omega^2}}$$

Kravet i uppgiften ger

$$\frac{1}{\sqrt{(K - \omega^2)^2 + \omega^2}} < 0.1$$

$$10 < \sqrt{(K - \omega^2)^2 + \omega^2}$$

vilket ger

$$\sqrt{100 - \omega^2} + \omega^2 < K$$

För $\omega = 1$ ger detta kravet $K > 11.0$ och för $\omega = 5$ fås kravet $K > 33.7$.

Svar: För $\omega = 1$ är kravet $K > 11.0$ och för $\omega = 5$ är kravet $K > 33.7$.

(c) Stegsvaren i A och B har översläng, vilket hör samman med Bodediagrammen i I och II, vilka har en resonanstopp. Systemet i II har högre bandbredd än det i I, vilket gör att II hör samman med stegsvaret i A som har kortare stigtid, vilket då gör att B hör samman med I. På motsvarande sätt har systemet i IV högre bandbredd än III, vilket ger att IV hör samman med C och III hör samman med D.

Svar: A - II, B - I, C - IV och D - III.

3. (a) I figurerna A och D fås ett stationärt fel, vilket hör samman med fallen II och IV där $F(s)$ inte innehåller någon I-del. I D är överslängen större och det stationära felet mindre, vilket hör samman med ett större värde på K_P, d v s II. I fall I är både K_P och K_I större, vilket ger snabbare stegsvar och större översläng, vilket fås i C.

Svar: A - IV, B - III, C - I och D - II.

(b) Blockschemaräkning ger att överföringsfunktionen från referenssignal till reglerfel ges av (känslighetsfunktionen)

$$E(s) = \frac{1}{1 + F(s)G(s)} R(s)$$

och med insatta uttryck

$$G(s) = \frac{1}{(2s+1)^2} \quad F(s) = \frac{K_P s + K_I + K_D s^2}{s}$$

fås

$$E(s) = \frac{s(2s+1)^2}{s(2s+1)^2 + K_P s + K_I + K_D s^2} R(s)$$

Svar: Överföringsfunktionen från referenssignal till reglerfel ges av

$$E(s) = \frac{s(2s+1)^2}{s(2s+1)^2 + K_P s + K_I + K_D s^2} R(s)$$

(c) Laplacetransformen för en ramp $r(t) = 2t$ ges av $R(s) = 2/s^2$. Slutvärdessatsen ger därmed

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s \frac{s(2s+1)^2}{s(2s+1)^2 + K_P s + K_I + K_D s^2} \cdot \frac{2}{s^2} = \frac{2}{K_I}$$

Svar: Det stationära reglerfelet blir $2/K_I$ och det är alltså endast koefficienten K_I som påverkar felet i stationärt tillstånd.

4. (a) Låt $L = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix}$ så att

$$u(t) = -Lx(t) + r(t)$$

Insättning i tillståndsmodellen ger

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B(-Lx(t) + r(t)) = (A - BL)x(t) + Br(t)$$

Karakteristiska ekvationen fås ur

$$\det(sI - A + BL) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{l_1}{J} & s + \frac{f+l_2}{J} \end{bmatrix} = s\left(s + \frac{f + l_2}{J}\right) + \frac{l_1}{J} = 0$$

Svar: $s\left(s + \frac{f+l_2}{J}\right) + \frac{l_1}{J} = 0$

(b) Den önskade polplaceringen är i -1 vilket ger att den önskade karakteristiska ekvationen är

$$(s+1)^2 = s^2 + 2s + 1 = 0$$

Insättning av $J = 1$ och $f = 0.1$ och identifiering av koefficienter ger

$$s^2 + \frac{0.1 + l2}{1}s + \frac{l_1}{1} = s^2 + (0.1 + l_2)s + l_1 = 0 \implies$$

$$\begin{cases} 0.1 + l_2 = 2 \\ l_1 = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} l_2 = 1.9 \\ l_1 = 1 \end{cases} \iff L = \begin{bmatrix} 1 & 1.9 \end{bmatrix}$$

Svar: $L = \begin{bmatrix} 1 & 1.9 \end{bmatrix}$

(c) Från uppgift (a) fås att karakteristiska ekvationen för $f = 0.5$ och $J = 1$ är

$$s\left(s + \frac{f + l_2}{J}\right) + \frac{l_1}{J} = s^2 + (0.5 + 1.9)s + 1 = s^2 + 2.4s + 1 = 0 \iff$$
$$(s + 1.2)^2 - 1.44 + 1 = 0 \iff s = -1.2 \pm \sqrt{0.44} \iff s \approx \begin{bmatrix} -0.537, & -1.86 \end{bmatrix}$$

Svar: En pol hamnar till höger om -1, där polerna i (b) placerades, d v s närmare origo så hela systemet blir långsammare.

(d) Att vinkelhastighetsgivaren är sönder kan ses som att $l_2 = 0$ och förstärkningen blir då $\tilde{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$. Genom att sätta in l_2 i den karakteristiska ekvationen ovan fås

$$s^2 + 0.1s + 1 = 0$$

Denna ekvation har sina rötter i

$$(s + 0.05)^2 - 0.05^2 + 1 = 0 \iff s = -0.05 \pm i\sqrt{1 - 0.05^2} \approx -0.05 \pm i$$

Svar: Systemet är fortfarande stabilt, men nästan helt odämpat, så robotarmen kommer att oscillera kraftigt.

5. (a) Under de angivna förutsättningarna ges modellen av differentialekvationen

$$\dot{y}(t) + \lambda y(t) = u(t)$$

eller sambandet

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

där

$$G(s) = \frac{1}{s+\lambda}$$

Utsignalens slutvärde, när $u(t) = \bar{u}$ fås, antingen genom att lösa differentialekvationen eller med hjälp av slutvärdessatsen, och det ger att

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{\bar{u}}{\lambda}$$

För ett välisolerat hus, d v s ett hus där det läcker ut lite värme, är λ litet. Detta ger en hög slutlig innetemperatur för en viss tillförd värmeeffekt.

(b) Modellen för huset, med $\lambda = 1$, är

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

och det verkliga systemet ges av

$$G^0(s) = \frac{1}{s + (1+\delta)}$$

När PI-regulatorn

$$F(s) = 1 + 4\frac{1}{s}$$

används på $G^0(s)$ blir det återkopplade systemets karakteristiska ekvation

$$s^2 + (2+\delta)s + 4 = 0$$

som har lösningarna

$$s = -\frac{(2+\delta)}{2} \pm \sqrt{\frac{(2+\delta)^2}{4} - 4}$$

För $\delta < 2$ kommer polerna att vara komplexa med realdel $-(2+\delta)/2$, som alltid är negativ eftersom $\delta > -1$. För $\delta > 2$ kommer polerna att vara reella, men hela tiden i vänster halvplan.

Svar: Det återkopplade systemet är stabilt för alla $\delta > -1$.

(c) Med

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \quad G^0(s) = \frac{1}{s+(1+\delta)}$$

ger sambandet

$$G^0(s) = G(s)(1 + \Delta G(s))$$

att det relativa modellfelet ges av

$$\Delta G(s) = \frac{-\delta}{s+(1+\delta)}$$

Robusthetskravet

$$\frac{1}{\mid \Delta G(i\omega) \mid} > 1.5 \quad \forall \ \omega$$

ger med insättning av det relativa modellfelet

$$\frac{\sqrt{\omega^2 + (1+\delta)^2}}{\mid \delta \mid} > 1.5$$

Vänsterledet är som minst för $\omega = 0$ vilket gör att det räcker att studera olikheten

$$\frac{(1+\delta)}{\mid \delta \mid} > 1.5$$

För $\delta > 0$ fås

$$\frac{(1+\delta)}{\delta} > 1.5$$

vilket ger $\delta < 2$.

För $\delta < 0$ fås

$$\frac{(1+\delta)}{-\delta} > 1.5$$

vilket ger $\delta > -0.4$.

Svar: Robusthetskriterier ger att det återkopplade systemet när $F(s)$ används på $G^0(s)$ garanterat är stabilt för $-0.4 < \delta < 2$.

(d) Framkoppling från störningar innebär att man mäter den störning som påverkar systemet och låter denna information inverka på valet av styrsignal. För att kunna införa detta behöver Isabella och Emil köpa en sensor som mäter utetemperaturen.