TENTAMEN

Datum:	15 januari 2019
Tid:	14–18
Provkod:	TEN1
Kursnamn:	TNSL05 – Optimering, modellering och planering
Institution:	ITN
Antal uppgifter:	5
Betygskrav:	För godkänt krävs normalt 12 p, betyg 4 kräver 16p och betyg 5, 21p.
Examinator:	Joakim Ekström
Jourhavande lärare:	Marcus Posada, 0734-160222
Kursadministratör:	Marie-Louise Gustafsson, 011-363121
Tillåtna hjälpmedel:	Miniräknare, ett A4-blad med valfri text/bilder/anteckningar på båda sidor, ordlista för översättning till svenska efter behov

Utlämning av skrivningar sker tidigast efter att resultat har meddelats med e-post. Kortfattat lösningsförslag publiceras på kursens hemsida vid skrivningstidens slut.

Tentamensinstruktioner

<u>När Du löser uppgifterna</u>

Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden Du gör.
Använd alltid de standardmetoder som behandlats på föreläsningar och lektioner.
Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

<u>Vid skrivningens slut</u>

Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget de uppgifter Du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.
Om du bifogar sidor från tentamen måste dessa sidor rivas ut och lämnas in som numrerade lösblad

(5p) Uppgift 1

Ett företag har två olika fabriker (A och B) där de fyra produkterna, numrerade 1, 2, 3 och 4, tillverkas. Samtliga produkter kan tillverkas i båda fabrikerna. Tiden det tar att producera en enhet av respektive produkt är 3, 4, 2 och 10 minuter för respektive produkt i fabrik A och 4, 5, 6 och 2 minuter för respektive produkt i fabrik B. Totalt finns 2000 timmar tillgängliga vid varje fabrik det kommande året. Vinsten för varje tillverkad produkt är 15, 25, 10 och 25 kr för respektive produkt, och det maximala antalet enheter av varje produkt som företaget tror sig kunna sälja under året är 100 000, 60 000, 40 000 och 50 000 stycken.

Följande optimeringsproblem har formulerats för att maximera vinsten för produktionen under ett år.

Variabeldefinition:
x_{ij}= antal enheter av produkt *j* som tillverkas i fabrik *i, i=A eller B, j=1,2,3,4*

$$\max z = 15 \cdot (x_{A1} + x_{B1}) + 25 \cdot (x_{A2} + x_{B2}) + 10 \cdot (x_{A3} + x_{B3}) + 25 \cdot (x_{A4} + x_{B4})$$

$$\begin{gathered}
3x_{A1} + 4x_{A2} + 2x_{A3} + 10x_{A4} \leq 2000 \cdot 60 \\
4x_{B1} + 5x_{B2} + 6x_{B3} + 2x_{B4} \leq 2000 \cdot 60 \\
x_{A1} + x_{B1} \leq 10000 \\
x_{A2} + x_{B2} \leq 6000 \\
x_{A3} + x_{B3} \leq 4000 \\
x_{A4} + x_{B4} \leq 5000 \\
x_{ij} \geq 0, \quad i = A, B \quad j = 1,2,3,4
\end{gathered}$$

Gör förändringar i modellen ovan så att följande tillägg till problemet kan modelleras. *Tips: Du kan behöva lägga till både nya variabler och nya villkor.*

a) Det går att köpa in övertid i antingen fabrik *A eller B*. För den fasta kostnaden *K* kr får man tillgång till 100 timmar extra, men endast vid en av fabrikerna. (2 p)

b) Att starta upp produktionen av respektive produkt i respektive fabrik kostar a_{ij} kr, *i=A,B, j=1,2,3,4.* Detta är en kostnad som endast uppstår en gång för respektive fabrik och produkt per år. (3 p)

(5p) Uppgift 2

En juicetillverkare tillverkar tre olika produkter: Morgonjuice (M), Apelsindryck (A) och Lemonad (L). Alla produkter säljs och distribueras i stora kvantiteter och prissätts per liter.

- För att tillverka en liter Morgonjuice behövs 0,5 liter apelsinjuice, 0,2 liter cintronjuice, 6 gram socker samt vatten.
- För att tillverka en liter Apelsindryck behövs 0,1 liter apelsinjuice, 30 gram socker samt vatten.
- För att tillverka en liter Lemonad behövs 0,6 liter citronjuice, 50 gram socker samt vatten.

Morgonjuicen säljs för 15 kr per liter, Apelsindrycken för 8 kr per liter och Lemonaden för 22 kr per liter. Företaget köper socker för 1 öre per gram, apelsinjuice för 2 kr per liter och citronjuice för 4 kr per liter. Leverantören av cintronjuice kan maximalt leverera 4 000 liter citronjuice per dag och företaget har kapacitet att tillverka totalt 10 000 liter dryck per dag. Vinstmaximeringsproblemet kan formuleras som

x_i : antal liter som producerats av dryck i, $i = M, A, L$

$$\max z = 13.14x_M + 7.5x_A + 19.1x_L$$

då

$$x_M + x_A + x_L \le 10000 \quad \text{(produktionskapacitet)}$$
$$0.2x_M + 0.6x_L \le 4000 \quad \text{(begränsad tillgång på citronjuice)}$$

Modellen har lösts med CPLEX/AMPL och utdata finns på nästa sida. Utgå från utdatan och besvara följande frågor:

a) Hur mycket måste priset på Apelsindrycken öka för att det ska bli intressant att tillverka denna dryck? (1p)
b) Josa undersöker möjligheten att utöka med extra produktionskapacitet. En utbyggnad för ytterligare 5 000 liter dryck per dag skulle kosta Josa 40 000 kr per produktionsdag. Bör Josa utöka kapaciteten? (2p)
c) Hur förändras målfunktionsvärdet om priset på Morgonjuicen minskar med 3kr? (2p)

```
CPLEX 11.0.1: sensitivity
CPLEX 11.0.1: optimal solution; objective 161200
2 dual simplex iterations (1 in phase I)

z = 161200

: _varname   _var    _var.rc     :=
1   xM       5000       0
2   xA          0      -2.66
3   xL       5000       0
;

: _varname    _var.down  _var.current _var.up    :=
1   xM         11.3667     13.14           19.1
2   xA          -1e+20      7.5            10.16
3   xL          13.14       19.1           24.42
;

:   _conname  _con.slack _con.dual    :=
1   kapacitet     0        10.16
2   citron        0        14.9
;

:   _conname  _con.down _con.current _con.up    :=
1   kapacitet    6666.67    10000      20000
2   citron          2000       4000      6000
;
```

(5p) Uppgift 3

Betrakta problemet

$$\begin{array}{llcl}
\max z = & 3x_1 + x_2 & & \\
\text{då} & 2x_1 + x_2 & \leq 8 & (1) \\
& x_1 & \leq 2 & (2) \\
& x_2 & \leq 7 & (3) \\
& & & \\
& x_1, x_2 \geq 0 & &
\end{array}$$

Samtliga deluppgifter kan lösas grafiskt utan att någon simplextablå konstrueras.

a) Rita upp det tillåtna området och bestäm grafiskt den optimala lösningen. (2p)
b) För var och ett av bivillkoren åt gången, bestäm hur det optimala målfunktionsvärdet förändras vid en enhets ökning av respektive högerled. (2p)
c) Formulera det duala problemet. (1p)

(5p) Uppgift 4

Betrakta nedanstående minimeringsproblem, och den optimala simplextablån för problemet (där variablerna s_1, s_2 och s_3 är slackvariabler för respektive bivillkor).

$$\begin{aligned}
\min z &= -2x_1 - x_2 + 2x_3 \\
\text{då} \quad & \phantom{4x_1 + {}} x_2 + 2x_3 \leq 10 \\
& 4x_1 \phantom{{}+ x_2} - 2x_3 \geq 3 \\
& x_1 + x_2 + x_3 \leq 9 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

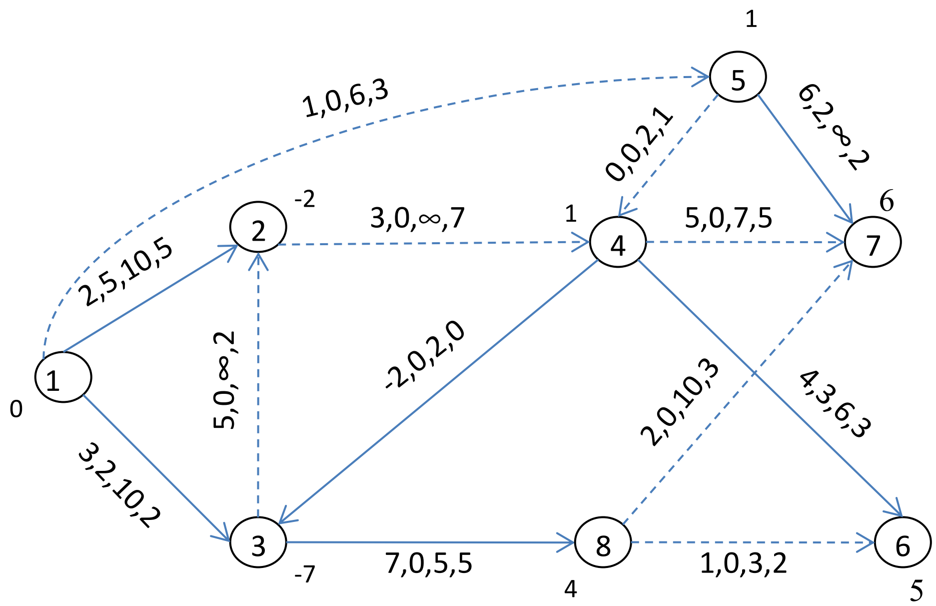
basvar/var	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	$\bar{b}$
z	1	0	-1	-4	0	0	-2	-18
s_1	0	0	1	2	1	0	0	10
x_1	0	1	1	1	0	0	1	9
s_2	0	0	4	6	0	1	4	33

Besvara följande frågor utan att genomföra någon ny iteration:

a) Hur stort är slacket i respektive bivillkor? (1p)
b) För vilka värden på målfunktionskoefficienten för x_1 är lösningen ovan den optimala? (2p)
c) Antag att problemet ovan istället är ett maximeringsproblem. Tablån ovan är då inte längre optimal. Välj inkommande basvariabel efter kriteriet störst positiv reducerad kostnad. Bestäm inkommande och utgående basvariabel i nästa iteration. (2 p)

(5p) Uppgift 5

Betrakta nedanstående optimala minkostnadsflödesnätverk, med nodpriser markerade vid respektive nod. Ett basträd är givet av de streckade bågarna. Nod 1 och 3 är källor med styrka 10 respektive 5, och nod 6 och 7 är sänkor med styrka 5 respektive 10. Varje båge är märkt med kostnad, undre gräns, övre gräns, samt aktuellt flöde.



a) Hur mycket måste priset på båge (1,2) förändras för att man ska vilja öka flödet på denna båge? (2p)

b) Anta att man lägger till en båge från nod 2 till nod 8, med kostnad 2, undre gräns 0 och övre gräns 6. Den aktuella lösningen är då inte längre optimal. Gör ytterligare en iteration med simplex för minkostnadsflödesproblem. Avgör om den nya lösningen är optimal. *Var noga med att motivera vilken båge som blir utgående och varför. Glöm inte att uppdatera flödena i nätverket.* (3p)