TNA001 FÖ 5 Kap 1.6 (fr.o.m. sid. 43) Induktionsbevis

a) Fakultet och binomialkoefficienter

För alla heltal $n > 0$ definieras ***n*-fakultet** enligt

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n.$$

Vi får t. ex.

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, \qquad 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 \qquad (\text{alt. } 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120).$$

Dessutom gäller att

$$0! = 1.$$

Talen $\binom{n}{k}$ ("n över k") kallas **binomialkoefficienter** och ges av

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \text{för } n \geq 0 \text{ och } k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Vi får t.ex

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4!}{3!1!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = 4$$

samt

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{7!}{2!5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 21 \text{ och } \binom{7}{5} = \frac{7!}{5!(7-5)!} = \frac{7!}{5!2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 21$$

där vi ser att $\binom{7}{2} = \binom{7}{5}$, vilket illustrerar sambandet $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ för $0 \leq k \leq n$ (1.38).

Dessutom gäller

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \text{och} \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \qquad (1.37).$$

För binomialutveckling av binom, t.ex. $(a+b)^5$, används **binomialsatsen** (binomialformeln) som ges av

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

för alla $n \in \mathbb{N}$.

- **Pascals triangel** (med symmetriegenskaper)

Exempel 27

a) $(x+1)^5 =$

b) $(x-2)^5 =$

c) $(2x-y)^4 =$

Exempel 28

Bestäm koefficienten för x^3 i utvecklingen av $(2x-1)^7$.

Induktionsbevis

- Induktionsbevis illustreras via **Exempel 29** nedan.
- Bevis av summaformeln för aritmetisk summa med hjälp av ett induktionsbevis (**Exempel 30**).
- Exempel på en olikhet som bevisas med induktion: $(x+1)^n \geq 1 + nx, n \in \mathbb{Z}^+, x \geq 0$ (**Exempel 31**).

Det förekommer då och då att man härleder satser med hjälp av s.k. *induktion*. I princip går man till väga så här: Man har en följd påståenden $P(n_0), P(n_0+1), \ldots$ och man vill visa att $P(n)$ är sant för alla *heltal* $n \geq n_0$.

Beviset sker i **tre** STEG.
STEG 1: Man visar att $P(n_0)$ är sant.
STEG 2: Man visar att för varje $p \geq n_0$ gäller det att om $P(p)$ är sant, så är även $P(p+1)$ sant.
STEG 3: Man drar den önskade slutsatsen nämligen att $P(n)$ är sant för alla heltal $n \geq n_0$.

Vi ska illustrera tekniken med hjälp av några exempel. Vi skriver ”enligt antagandet” då vi tar det s.k. "induktionssteget", som är den viktigaste delen av STEG 2.

Exempel 29.a)
Bevisa att för alla $n \in \mathbb{Z}^+$, gäller

$$P(n): \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2.$$

Lösning:

Vi inför beteckningarna $V(n)$ och $H(n)$ för respektive vänster- och högerled i påståendet

$P(n)$ ovan. d.v.s. $V(n) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)$ och $H(n) = n^2$.

STEG 1: $P(1) : V(1) = \sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ medan $H(1) = 1^2 = 1$.

Alltså är $V(1) = H(1)$ och $P(1)$ är sant.

STEG 2: Vi antar att $P(p)$ är sant för något $p \in \mathbb{Z}^+$, d. v. s.

$$V(p) = \sum_{k=1}^{p}(2k-1) = H(p) = p^2.$$

Detta medför att

$$V(p+1) = \sum_{k=1}^{p+1}(2k-1) = \underbrace{(2\cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) + (2 \cdot 3 - 1) + \ldots + (2p-1)}_{\substack{\text{Termer med } k=1 \\ \text{t.o.m. } k=p}} + \underbrace{(2(p+1)-1)}_{\text{Term med } k=p+1}$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{p}(2k-1)\right)}_{\substack{\text{Termer med } k=1 \\ \text{t.o.m. } k=p}} + \underbrace{(2(p+1)-1)}_{\text{Term med } k=p+1} = \left(\sum_{k=1}^{p}(2k-1)\right) + (2p+1)$$

$$= /\text{Enligt antagandet}/$$

$$= p^2 + 2p + 1.$$

Vi har dessutom att

$$H(p+1) = (p+1)^2 = p^2 + 2p + 1$$

vilket ger att $V(p+1) = H(p+1)$ och $P(p+1)$ är sant. Vi har visat att $P(p)$ sant $\Rightarrow P(p+1)$ sant.

STEG 3: Eftersom $P(1)$ är sant måste enligt STEG 2 även $P(2)$ vara sant, men det innebär även att $P(3)$

är sant o.s.v. och vi kan dra den önskade slutsatsen att $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$ gäller för alla $n \in \mathbb{Z}^+$.

Exempel 29.b)

Visa att

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1) = \frac{n(n+3)}{2}$$

för $n \in \mathbb{Z}^{+}$.

Exempel 30
Bevis av summaformeln för aritmetisk summa med hjälp av ett induktionsbevis.

Bevis:
Vi ska bevisa att $P(n)$: $V(n) = \sum_{i=1}^{n}(a+(i-1)d) = n\frac{2a+(n-1)d}{2} = H(n)$ gäller för alla $n \in \mathbb{Z}^+$.

STEG 1: $P(1)$: $V(1) = \sum_{i=1}^{1}(a+(i-1)d) = a$ $\quad H(1) = \frac{2a}{2} = a$

Alltså $V(1) = H(1)$ d.v.s. $P(1)$ gäller.

STEG 2: Vi antar att $P(k)$ gäller för godtyckligt fixt tal $k \in \mathbb{Z}^+$ d.v.s.

$$\mathrm{V}(k) = \sum_{i=1}^{k}(a+(i-1)d) = k\frac{2a+(k-1)d}{2} = H(k).$$

Detta medför att

$$V(k+1) = \sum_{i=1}^{k+1}(a+(i-1)d) = \sum_{i=1}^{k}(a+(i-1)d) + (a+kd)$$

$$=/\text{Enligt antagandet}/$$

$$= k\frac{2a+(k-1)d}{2} + a + kd = \frac{2ak + k(k-1)d + 2a + 2kd}{2}$$

$$= \frac{2a(k+1) + (k^2+k)d}{2} = \frac{2a(k+1) + (k+1)kd}{2} = (k+1)\frac{2a+kd}{2}.$$

Dessutom har vi

$$H(k+1) = (k+1)\frac{2a+(k+1-1)d}{2} = (k+1)\frac{2a+kd}{2}$$

d.v.s.

$$V(k) = H(k) \Rightarrow V(k+1) = H(k+1).$$

STEG 3: Enligt steg 1 gäller påståendet för $n = 1$. Då gäller det enligt steg 2 även för $n = 1 + 1 = 2$ Men då gäller det även för $n = 2 + 1 = 3$ o.s.v. Via matematisk induktion har vi alltså att påståendet gäller för alla $n \in \mathbb{Z}^+$, v.s.v.

Exempel 31

Vi skall visa via induktion att sambandet $(1+x)^n \geq 1+nx$ gäller för alla $n \in \mathbb{Z}^+$ och $x \geq -1$.

Bevis:

I. För $n = 1$ får vi $VL = (1+x)^1 = 1+x = HL$.

Alltså har vi $HL \geq VL$ för $n = 1$.

II. Antag att sambandet gäller för $n = p \geq 1$, d.v.s. $(1+x)^p \geq 1+px$.

Studera nu fallet $n = p+1$.

Vi får då:

$$(1+x)^{p+1} = (1+x)^p \cdot (1+x)$$

/enligt antagandet och eftersom $x \geq -1$/

$$\geq (1+px)(1+x)$$

$$= 1 + x + px + px^2$$

$$= 1 + (p+1)x + px^2.$$

Men $1 + (p+1)x + px^2 \geq 1 + (p+1)x$ eftersom p är ett positivt heltal och $x^2 \geq 0$.

Således gäller $(1+x)^{p+1} \geq 1 + (p+1)x$ d.v.s. sambandet gäller för $n = p+1$ om det gäller för $n = p$.

III. Vi har visat att påståendet gäller för $n = 1$. Enl. II gäller påståendet då för $n = 1+1 = 2$, och då gäller det för $n = 2+1 = 3$ o.s.v.
Via matematisk induktion gäller således om $x \geq -1$ att$(1+x)^n \geq 1+nx$ för alla $n \in \mathbb{Z}^+$, v.s.v.