

TSKS10 Signaler, information & Kommunikation

Föreläsning 11

Några tidigare tentamensuppgifter

Mikael Olofsson

Institutionen för Systemteknik (ISY)

Ämnesområdet Kommunikationssystem

Tenta 2017-10-26, uppgift 8

Betrakta markbunden radiokommunikation över ett avstånd på 200 m. Vi vill öka detta avstånd till 800 m med oförändrad mottagen effekt. Hur mycket måste då sändareffekten ökas, uttryckt i dB? Vägförlustexponenten (path loss exponent) får antas vara $\gamma = 3$.

Se avsnitt 8.2.1 i kursboken

Tenta 2017-10-26, uppgift 8, lösning

8

Detta handlar om sträckdämpning. Vi har markbunden radiokommunikation över ett avstånd som initialt är 200 m, och får då någon mottagen effekt P . Vi frågar oss hur mycket vi måste öka sändareffekten för att mottagen effekt på avstånd av 800 m ska vara P , om vägförlustexponenten är $\gamma = 3$.

Enligt ekvation 8.28 på sidan 157 i SIC (2021) så ges mottagen effekt av

$$P = K(r/r_0)^{-\gamma},$$

för någon konstant K , där r är gångvägen och där r_0 är en referensgångväg som i vårt fall är $r_0 = 200$ m. K är då mottagen effekt på avstånd $r = r_0$, och är proportionell mot sänd effekt. Frågan kan då omformuleras som "Hur mycket måste K ökas för att P ska vara oförändrad om vi ökar r till 800 m?" Denna ökning blir

$$(r/r_0)^\gamma = (800/200)^3 = 4^3 = 2^6.$$

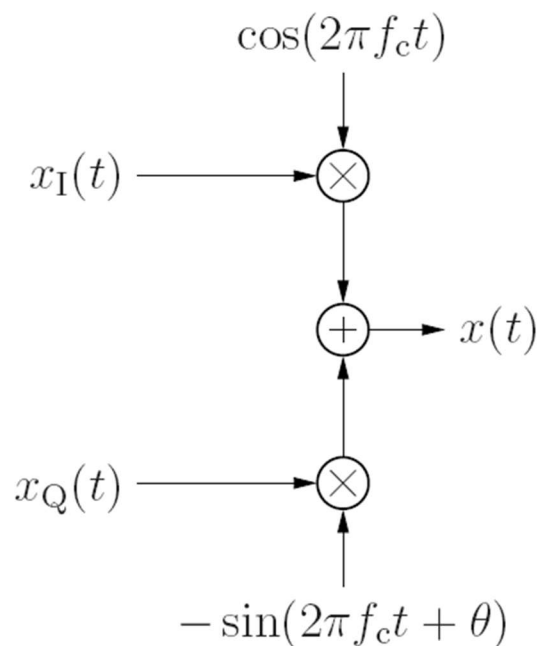
En effekttökning med faktorn 2 motsvarar 3 dB. En effekttökning med faktorn 2^6 motsvarar $6 \cdot 3 \text{ dB} = 18 \text{ dB}$.

Svar: Sändareffekten måste ökas med 18 dB.

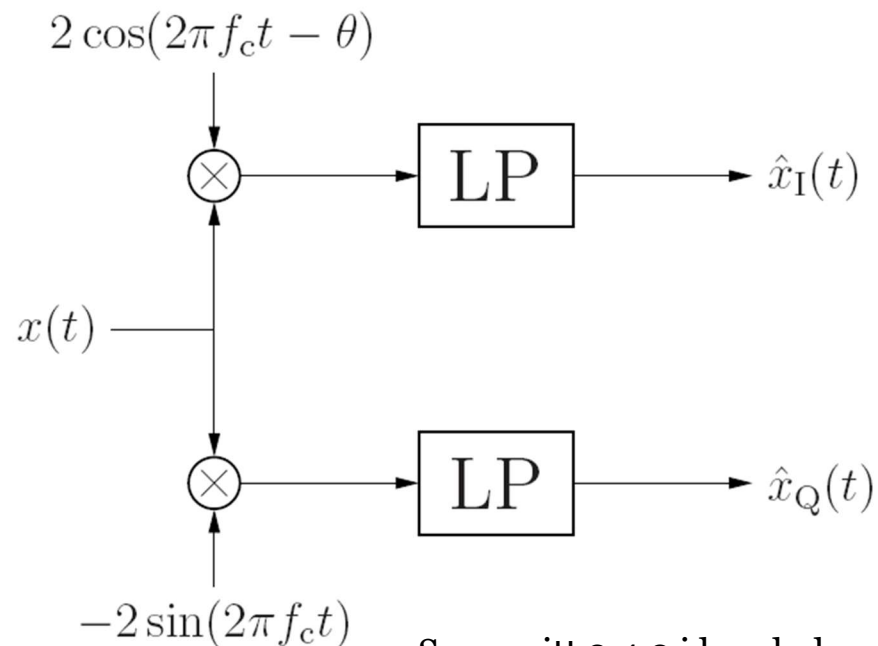
Tenta 2018-05-29, uppgift 4 – situation

Betrakta nedanstående I/Q-modulator och -demodulator, där det är ett fasfel θ i sinustermen på sändarsidan och ett fasfel $-\theta$ i cosinustermen på mottagarsidan.

I/Q-modulator med fasfel



I/Q-demodulator med fasfel



Se avsnitt 2.4.2 i kursboken

Tenta 2018-05-29, uppgift 4 - fortsättning

Som en konsekvens kan

$$\hat{x}_I(t) \neq x_I(t)$$

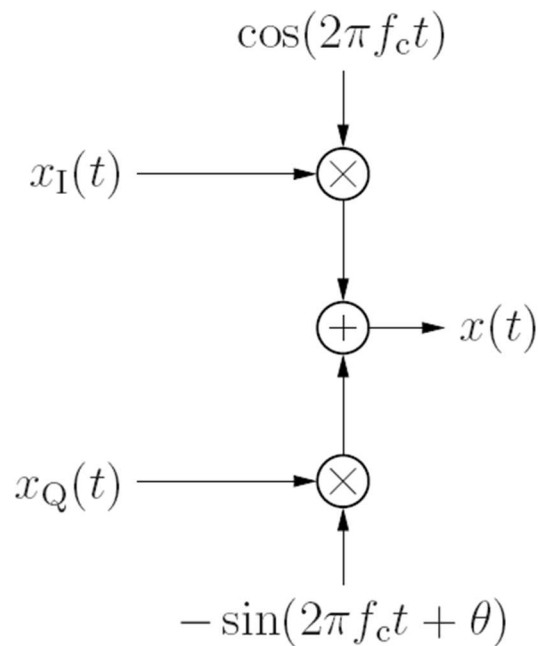
$$\hat{x}_Q(t) \neq x_Q(t)$$

gälla.

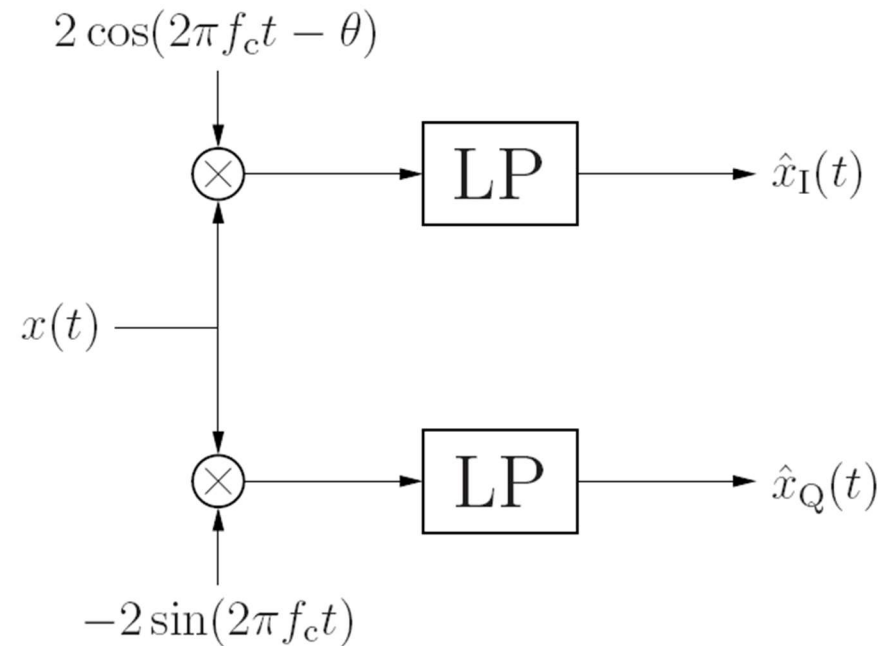
- a. Ge uttryck som relaterar $\hat{x}_I(t)$ och $\hat{x}_Q(t)$ till $x_I(t)$ och $x_Q(t)$. (3p)
- b. Anta att θ är känd hos mottagaren. Härled och beskriv en mekanism (ge en explicit formel), med vilken $x_I(t)$ och $x_Q(t)$ kan återskapas ur $\hat{x}_I(t)$ och $\hat{x}_Q(t)$. (3p)
- c. Beskriv ett sätt att rimlighetskontrollera ditt svar i b. (1p)
- d. För vilka värden på θ fungerar din lösning i b? (1p)

Tenta 2018-05-29, uppgift 4 – del a

I/Q-modulator med fasfel



I/Q-demodulator med fasfel



- a. Ge uttryck som relaterar $\hat{x}_I(t)$ och $\hat{x}_Q(t)$ till $x_I(t)$ och $x_Q(t)$. (3p)

Tenta 2018-05-29, uppgift 4, lösning del a

Från figuren har vi

$$x(t) = x_I(t) \cos(2\pi f_c t) - x_Q(t) \sin(2\pi f_c t + \theta).$$

Låt LP vara ett idealt lågpasfilter som matchar bandbredden hos basbandskomponenterna. För demodulatorn gäller för I-komponenten

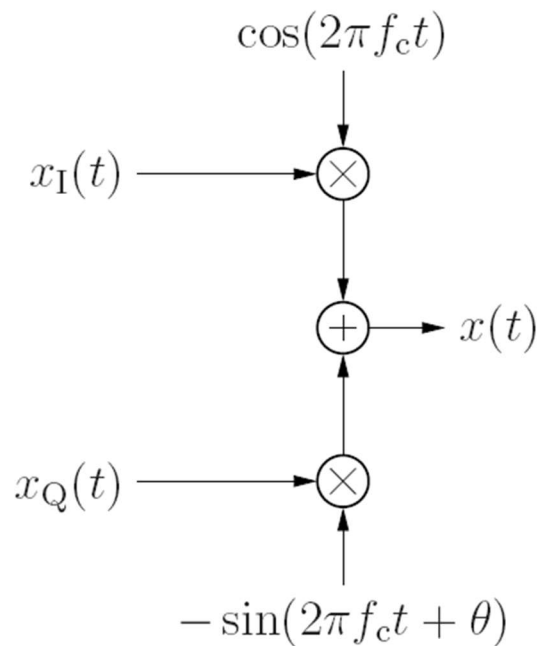
$$\begin{aligned}\hat{x}_I(t) &= \\ &= 2 \cdot \text{LP} \{ x(t) \cos(2\pi f_c t - \theta) \} \\ &= 2 \cdot \text{LP} \left\{ \left(x_I(t) \cos(2\pi f_c t) - x_Q(t) \sin(2\pi f_c t + \theta) \right) \right. \\ &\quad \left. \cdot \cos(2\pi f_c t - \theta) \right\} \\ &= 2 \cdot \text{LP} \left\{ x_I(t) \cos(2\pi f_c t) \cos(2\pi f_c t - \theta) \right. \\ &\quad \left. - x_Q(t) \sin(2\pi f_c t + \theta) \cos(2\pi f_c t - \theta) \right\} \\ &= \text{LP} \left\{ x_I(t) \left(\cos(\theta) + \cos(4\pi f_c t - \theta) \right) \right. \\ &\quad \left. - x_Q(t) \left(\sin(2\theta) + \sin(4\pi f_c t) \right) \right\} \\ &= x_I(t) \cos(\theta) - x_Q(t) \sin(2\theta).\end{aligned}$$

För Q-komponenten gäller

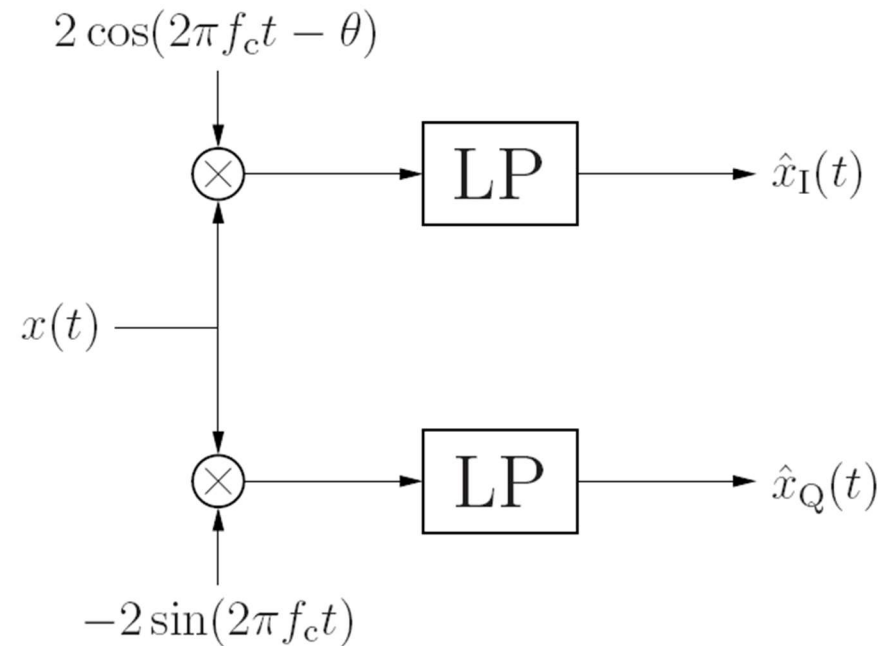
$$\begin{aligned}\hat{x}_Q(t) &= \\ &= -2 \cdot \text{LP} \{ x(t) \sin(2\pi f_c t) \} \\ &= -2 \cdot \text{LP} \left\{ \left(x_I(t) \cos(2\pi f_c t) - x_Q(t) \sin(2\pi f_c t + \theta) \right) \right. \\ &\quad \left. \cdot \sin(2\pi f_c t) \right\} \\ &= 2 \cdot \text{LP} \left\{ -x_I(t) \cos(2\pi f_c t) \sin(2\pi f_c t) \right. \\ &\quad \left. + x_Q(t) \sin(2\pi f_c t + \theta) \sin(2\pi f_c t) \right\} \\ &= \text{LP} \left\{ -x_I(t) \left(\sin(4\pi f_c t) \right) \right. \\ &\quad \left. + x_Q(t) \left(\cos(\theta) - \cos(4\pi f_c t + \theta) \right) \right\} \\ &= x_Q(t) \cos(\theta).\end{aligned}$$

Tenta 2018-05-29, uppgift 4 – del b

I/Q-modulator med fasfel



I/Q-demodulator med fasfel



- b. Anta att θ är känt hos mottagaren. Härled och beskriv en mekanism (ge en explicit formel), med vilken $x_I(t)$ och $x_Q(t)$ kan återskapas ur $\hat{x}_I(t)$ och $\hat{x}_Q(t)$. (3p)

Tenta 2018-05-29, uppgift 4, lösning del b

Från deluppgift a har vi

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_I(t) \\ \hat{x}_Q(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(2\theta) \\ 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_I(t) \\ x_Q(t) \end{pmatrix}.$$

Följaktligen gäller

$$x_Q(t) = \frac{1}{\cos(\theta)} \hat{x}_Q(t),$$

$$\begin{aligned} x_I(t) &= \frac{1}{\cos(\theta)} (\hat{x}_I(t) + \sin(2\theta)x_Q(t)) \\ &= \frac{1}{\cos(\theta)} \left(\hat{x}_I(t) + \frac{\sin(2\theta)}{\cos(\theta)} \hat{x}_Q(t) \right). \end{aligned}$$

Vi utnyttjar det trigonometriska sambandet

$$\sin(2\theta) = 2 \sin(\theta) \cos(\theta)$$

från tentans formelblad. Då skriver vi om sambandet som

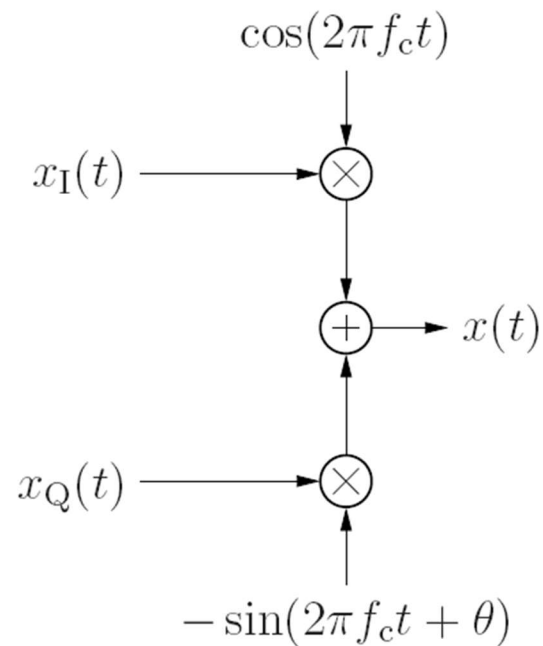
$$x_I(t) = \frac{1}{\cos(\theta)} (\hat{x}_I(t) + 2 \sin(\theta) \hat{x}_Q(t)).$$

Sammantaget har vi

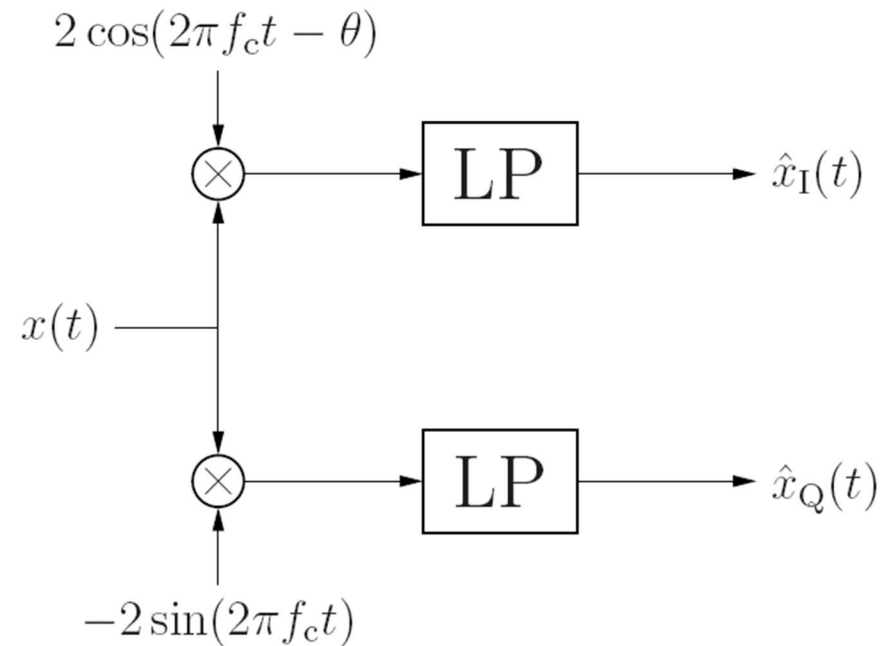
$$\begin{pmatrix} x_I(t) \\ x_Q(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\cos(\theta)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \sin(\theta) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_I(t) \\ \hat{x}_Q(t) \end{pmatrix}.$$

Tenta 2018-05-29, uppgift 4 – del c

I/Q-modulator med fasfel



I/Q-demodulator med fasfel



c. Beskriv ett sätt att rimlighetskontrollera ditt svar i b. (1p)

Tenta 2018-05-29, uppgift 4, lösning del c

Från del b:

$$\begin{pmatrix} x_I(t) \\ x_Q(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\cos(\theta)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \sin(\theta) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_I(t) \\ \hat{x}_Q(t) \end{pmatrix}.$$

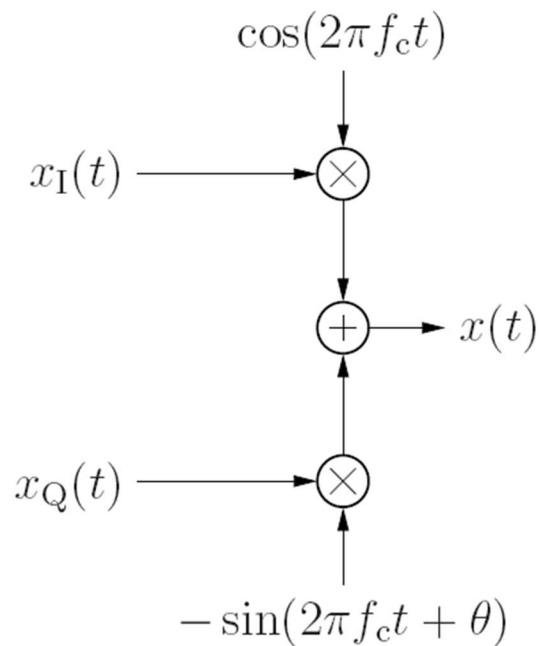
Om vi har $\theta = 0$, så ska

$$\hat{x}_I(t) = x_I(t) \quad \text{och} \quad \hat{x}_Q(t) = x_Q(t)$$

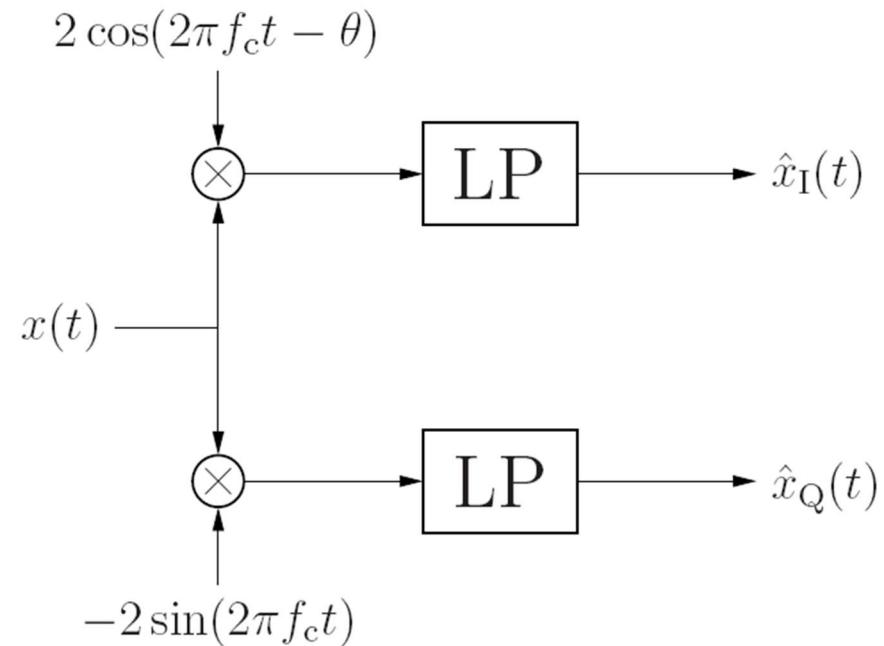
gälla, vilket det också gör om vi sätter in $\theta = 0$ i resultatet från deluppgift b.

Tenta 2018-05-29, uppgift 4 – del d

I/Q-modulator med fasfel



I/Q-demodulator med fasfel



d. För vilka värden på θ fungerar din lösning i b? (1p)

Tenta 2018-05-29, uppgift 4, lösning del d

Förutsättningen är att beräkningarna enligt deluppgift b kan utföras, vilket de kan om vi har $\cos(\theta) \neq 0$, eftersom vi dividerar med $\cos(\theta)$. Följaktligen fungerar lösningen i deluppgift b om vi har $\theta \neq \frac{\pi}{2} + m\pi$, för alla heltal m .

Tenta 2018-08-21, uppgift 7

- 7 En mobil, trådlös datalänk använder bandbredden 10 MHz och överför 50 Mb/s. Bärfrekvensen är 6 GHz. Sändaren använder en uteffekt på 10 W. Kanalens koherenstid är 10 ms och dess koherensbandbredd är 2 MHz. Avståndet mellan sändaren och mottagaren är 200 m. (4 p)

Man önskar fördubbla datatakten, till 100 Mb/s. Ett reklamblad har påstått att det enda som behöver ändras i det ovan beskrivna systemet är att fördubbla bandbredden, från 10 till 20 MHz. Är detta sant? Om ja, varför? Om inte, varför inte och vad mer måste ske?

Se avsnitt 7.2 i kursboken

Tenta 2018-08-21, uppgift 7, lösning

7

Vi använder Shannon-Hartleys formel (ekvation 7.11 på sidan 141 i SIC 2021), som ger kanalkapaciteten C för en AWGN-kanal, som en första ordningens approximation av prestanda, alltså

$$C = B \log_2 \left(1 + \frac{P}{BN_0} \right) = 50 \cdot 10^6 \text{ b/s},$$

där vi har effekten P , bandbredden B och ekvivalent spektraltäthet N_0 . Detta ger $P/BN_0 = 31$.

Om vi endast fördubblar bandbredden, dvs. byter B mot $2B$, så ökar kapaciteten till

$$C = 2B \log_2 \left(1 + \frac{P}{2BN_0} \right) \approx 80 \cdot 10^6 \text{ b/s}.$$

Det räcker alltså inte att öka bandbredden. Men, om vi också fördubblar effekten, dvs. även byter P mot $2P$, så får vi istället

$$C = 2B \log_2 \left(1 + \frac{2P}{2BN_0} \right) = 100 \cdot 10^6 \text{ b/s},$$

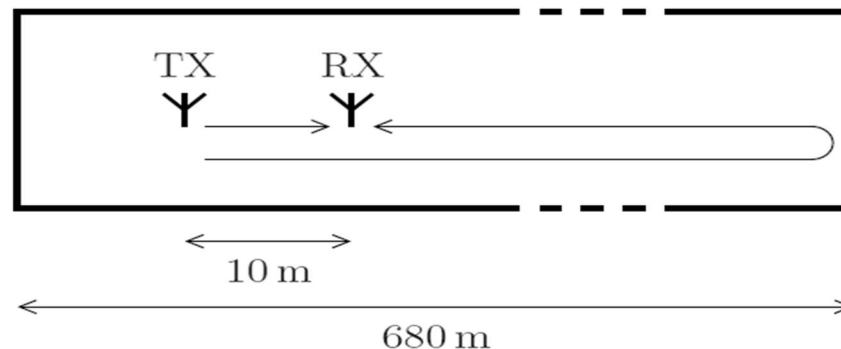
som önskat.

All annan information som gavs i uppgiften är väsentligen irrelevant.

Tenta 2018-10-31, uppgift 8

Mellan A- och B-husen på LiU:s campus går en kulvert (tunnel). Tunnelns längd är ungefär 680 m och dess tvärsnitt är kvadratisk med dimensionerna cirka 3×3 m. Man vill installera ett nätverk för trådlös kommunikation inne i tunneln. Avståndet mellan sändare och mottagare är 10 m. Bärfrekvensen är $f_c = 6$ GHz. Ingenting rör sig i tunneln.

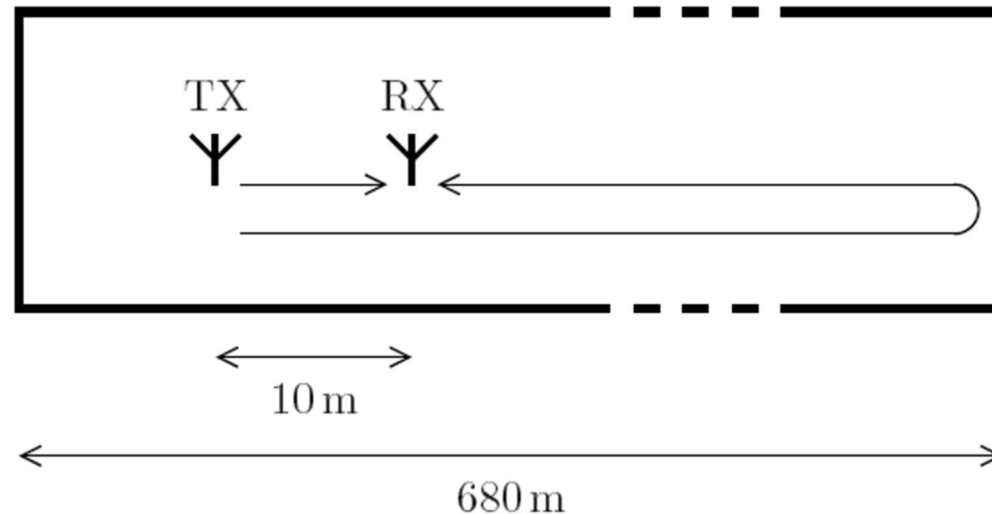
- a. Vilken koherensbandbredd kan man förvänta sig att kanalen kommer att ha, om reflektioner från tunnelns ändar förekommer, se enkel två-strålemodell i figuren nedan: (3p)



(Storleksordningar endast. Du kan anta att direktvågen och den reflekterade vågen har samma amplitud.)

Se avsnitt 7.1 i kursboken

Tenta 2018-10-31, uppgift 8, lösning, del a



Skillnaden i gångväg mellan de två signalvägarna är i värsta fall $2 \cdot 670 = 1340 \text{ m}$, vilket ger oss en delay spread på

$$T_d = \frac{1340}{c} \approx \frac{1340}{3 \cdot 10^8} \approx 4,5 \mu\text{s}$$

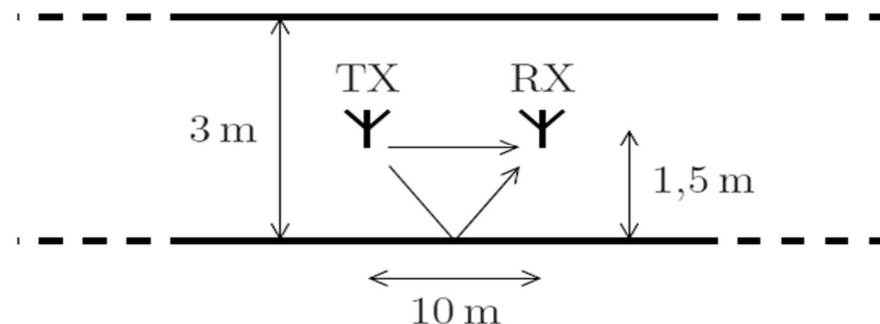
Detta är alltså den största delay spread vi kan få. Enligt ekvation 7.4 på sidan 137 i SIC (2021), så är koherensbandbredden som minst i storleksordning

$$B_c \sim \frac{1}{T_d} \approx \frac{1}{4,5 \cdot 10^{-6}} \approx 220 \text{ kHz}.$$

Tenta 2018-10-31, uppgift 8

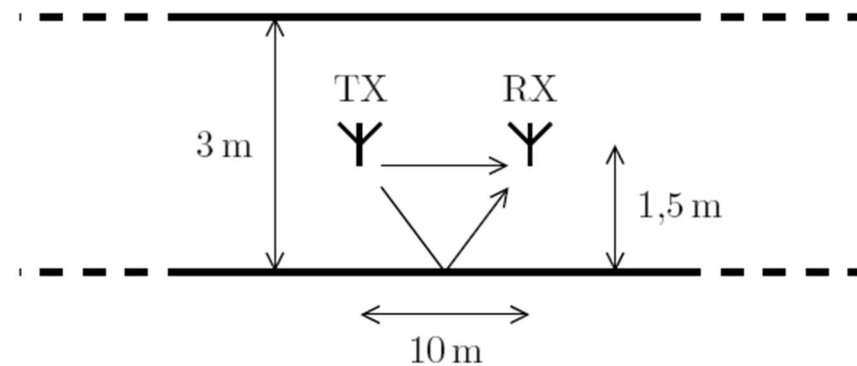
Mellan A- och B-husen på LiU:s campus går en kulvert (tunnel). Tunnelns längd är ungefär 680 m och dess tvärsnitt är kvadratisk med dimensionerna cirka 3×3 m. Man vill installera ett nätverk för trådlös kommunikation inne i tunneln. Avståndet mellan sändare och mottagare är 10 m. Bärfrekvensen är $f_c = 6$ GHz. Ingenting rör sig i tunneln.

- b. Vilken koherensbandbredd kan man förvänta sig att kanalen kommer ha, om endast “en lokal reflektion” förekommer, se enkel tvåstrålemodell i figuren nedan: (4p)



(Storleksordningar endast. Du kan anta att direktvågen och den reflekterade vågen har samma amplitud.)

Tenta 2018-10-31, uppgift 8, lösning, del b



Direktvägen är 10 m lång. Den reflekterade vägen har längd

$$2 \cdot \sqrt{5^2 + 1,5^2} = 2 \cdot \sqrt{27,25} \approx 10,44 \text{ m.}$$

Skillnaden i gångväg är alltså c:a 44 cm, vilket ger oss en delay spread på

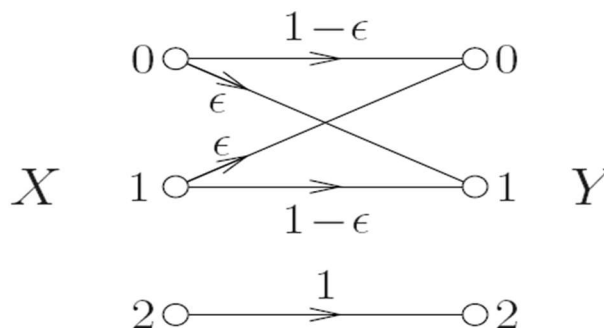
$$T_d = \frac{0.44}{c} \approx \frac{0,44}{3 \cdot 10^8} \approx 1,5 \text{ ns}$$

Då har vi koherensbandbredden i storleksordning

$$B_c \sim \frac{1}{T_d} \approx \frac{1}{1,5 \cdot 10^{-9}} \approx 670 \text{ MHz.}$$

Tenta 2018-08-21, uppgift 4

Figuren nedan visar övergångssannolikheterna mellan insignal och utsignal, för en ternär kanal, mellan dess insignal X och dess utsignal Y . Denna kanal har tre möjliga in- och utsymboler, 0, 1 och 2. Successiva användningar av kanalen är oberoende.

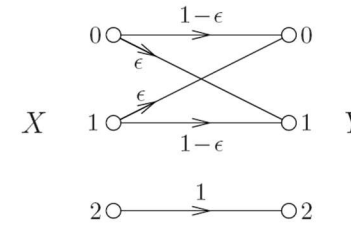


- Bestäm den ömsesidiga informationen $I(X;Y)$ uttryckt i ϵ och i sannolikheterna för insignalens utfall. (3 p)
- Bestäm kanalens kapacitet uttryckt i bitar per kanal användning. (5 p)
- Ange minst ett sätt att rimlighetskontrollera ditt svar i b. (1 p)
- Argumentera för att det går att kommunicera, t.o.m. felfritt, över kanalen oavsett värde på ϵ , utan att använda resultaten i a-c. (2 p)

Se avsnitt 6.4 i kursboken

Tenta 2018-08-21, uppgift 4, lösning, del a

Vi använder beteckningarna $p_0 = \Pr\{X=0\}$,
 $p_1 = \Pr\{X=1\}$,
 $p_2 = \Pr\{X=2\}$.



För utsignalen Y har vi då sannolikheterna

$$\Pr\{Y=0\} = (1 - \epsilon)p_0 + \epsilon p_1,$$

$$\Pr\{Y=1\} = (1 - \epsilon)p_1 + \epsilon p_0,$$

$$\Pr\{Y=2\} = p_2.$$

Vi vill bestämma den ömsesidiga informationen $I(X;Y)$. Vi har enligt ekvation 6.41 på sidan 111 i SIC (2021),

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X).$$

Vi vill alltså bestämma entropierna $H(Y)$ och $H(Y|X)$. Vi börjar med att bestämma entropin för Y utifrån sannolikheterna ovan. Vi får då

$$\begin{aligned} H(Y) &= - \sum_{y=0}^2 \Pr\{Y=y\} \log_2 (\Pr\{Y=y\}) \\ &= -((1-\epsilon)p_0 + \epsilon p_1) \log_2 ((1-\epsilon)p_0 + \epsilon p_1) \\ &\quad - ((1-\epsilon)p_1 + \epsilon p_0) \log_2 ((1-\epsilon)p_1 + \epsilon p_0) \\ &\quad - p_2 \log_2 (p_2), \end{aligned}$$

där vi förstås har $p_2 = 1 - p_0 - p_1$, och där alla p_i måste vara mellan noll och ett. Vi fortsätter med att bestämma den betingade entropin

$$H(Y|X) = \sum_{x=0}^2 p_x H(Y|X=x),$$

där vi har

$$H(Y|X=0) = H(Y|X=1) = H_2(\epsilon),$$

$$H(Y|X=2) = 0.$$

Sammantaget ger detta oss den betingade entropin

$$H(Y|X) = (p_0 + p_1)H_2(\epsilon).$$

Totalt innebär detta att vi har den ömsesidiga informationen

$$\begin{aligned} I(X;Y) &= -((1-\epsilon)p_0 + \epsilon p_1) \log_2 ((1-\epsilon)p_0 + \epsilon p_1) \\ &\quad - ((1-\epsilon)p_1 + \epsilon p_0) \log_2 ((1-\epsilon)p_1 + \epsilon p_0) \\ &\quad - p_2 \log_2 (p_2) - (p_0 + p_1)H_2(\epsilon), \end{aligned}$$

med $p_2 = 1 - p_0 - p_1$.

Tenta 2018-08-21, uppgift 4, lösning, del b 1(2)

Vi vill bestämma kanalens kapacitet C , som ges av

$$C = \max I(X; Y),$$

enligt ekvation 6.54 på sidan 118 i SIC (2021), där $I(X; Y)$ är den ömsesidiga informationen av X och Y enligt a, och där maximeringen är över alla fördelningar av X dvs. över alla möjliga val av sannolikheterna p_0 , p_1 och p_2 . Vi skriver om $I(X; Y)$ med hjälp av sambandet $p_2 = 1 - p_0 - p_1$, och får då

$$\begin{aligned} I(X; Y) &= \\ &= -((1-\epsilon)p_0 + \epsilon p_1) \log_2((1-\epsilon)p_0 + \epsilon p_1) \\ &\quad - ((1-\epsilon)p_1 + \epsilon p_0) \log_2((1-\epsilon)p_1 + \epsilon p_0) \\ &\quad - (1-p_0-p_1) \log_2(1-p_0-p_1) - (p_0+p_1)H_2(\epsilon). \end{aligned}$$

Vi vill nu bestämma de värden på p_0 och p_1 som maximerar $I(X; Y)$. Notera att uttrycket ovan är oförändrat om vi byter plats på p_0 och p_1 . Detta hör samman med symmetrin mellan symbolerna 0 och 1 i kanalen, och resulterar i att $p_0 = p_1$ måste gälla, i alla fall så länge ϵ inte är $1/2$. Vi återkommer till fallet $\epsilon = 1/2$.

Med $p_0 = p_1$ förenklas den ömsesidiga informationen till

$$\begin{aligned} I(X; Y) &= \\ &= -2p_0 \log_2(p_0) - (1-2p_0) \log_2(1-2p_0) - 2p_0 H_2(\epsilon), \end{aligned}$$

och vi vill hitta det värden på p_0 som maximerar $I(X; Y)$. Vi är då intresserade av derivatan

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp_0} I(X; Y) &= \\ &= -2 \log_2(p_0) - 2p_0 \frac{1/\ln(2)}{p_0} \\ &\quad - (-2) \log_2(1-2p_0) - (1-2p_0) \frac{1/\ln(2)}{1-2p_0} (-2) \\ &\quad - 2H_2(\epsilon) \\ &= -2 \log_2(p_0) + 2 \log_2(1-2p_0) - 2H_2(\epsilon). \end{aligned}$$

För att hitta extrempunkter sätter vi detta till noll. Det ger oss

$$H_2(\epsilon) = \log_2(1-2p_0) - \log_2(p_0).$$

Vi löser ut p_0 ur detta och får

$$p_0 = \frac{1}{2 + 2^{H_2(\epsilon)}}.$$

Tenta 2018-08-21, uppgift 4, lösning, del b 2(2)

Det finns alltså en extrempunkt och inte mer. Vi noterar att p_0 ligger mellan 0 och $1/2$, vilket är nödvändigt för att alla sannolikheter ska vara mellan 0 och 1. Vidare, för att försäkra oss om att vi har hittat ett maximum, så deriverar vi en gång till och får

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dp_0^2}I(X;Y) &= -2\frac{1/\ln(2)}{p_0} + 2\frac{1/\ln(2)}{1-2p_0}(-2) \\ &= -\frac{2}{\ln(2)}\left(\frac{1}{p_0} + \frac{2}{1-2p_0}\right),\end{aligned}$$

vilket uppenbart är negativt för alla värden på p_0 mellan 0 och $1/2$. Specifikt är det alltså negativt för det värde vi hittade ovan, och vi har därmed hittat ett maximum.

Kanalen har alltså kapaciteten

$$\begin{aligned}C &= \max I(X;Y) \\ &= -\frac{2}{2+2^{H_2(\epsilon)}} \log_2 \left(\frac{1}{2+2^{H_2(\epsilon)}} \right) \\ &\quad - \left(1 - \frac{2}{2+2^{H_2(\epsilon)}} \right) \log_2 \left(1 - \frac{2}{2+2^{H_2(\epsilon)}} \right) \\ &\quad - \frac{2}{2+2^{H_2(\epsilon)}} H_2(\epsilon)\end{aligned}$$

med enhet bitar per kanalanvändning (bpcu).

vilket är en funktion av $p_0 + p_1$. Med samma metodik som ovan finner vi då att maximum uppnås vid $p_0 + p_1 = 1/2$, och vi får kapaciteten $C = 1$, eftersom vi då har en felfri binär kanal med 0 och 1 tolkade som samma symbol. Detta är förstås också gränsvärdet av det allmänna uttrycket för C som vi hittade ovan när vi låter ϵ gå mot $1/2$.

Slutligen återkommer vi nu som utlovat till fallet $\epsilon = 1/2$. Då har vi

$$\begin{aligned}I(X;Y) &= \\ &= -(p_0+p_1) \log_2 \left(\frac{1}{2}(p_0+p_1) \right) \\ &\quad - (1-(p_0+p_1)) \log_2 (1-(p_0+p_1)) - (p_0+p_1),\end{aligned}$$

Tenta 2018-08-21, uppgift 4, lösning, del c och d

- c. Det enklaste sättet att rimlighetskontrollera svaret i b är att kontrollera fallen $\epsilon = 0$ och $\epsilon = 1$. Det motsvarar en felfri ternär kanal som har kapacitet $\log_2(3)$, vilket stämmer i uttrycket ovan.

Man kan också kontrollera fallet $\epsilon = 1/2$. Då kan vi inte statistiskt skilja på symbolerna 0 och 1 i mottagaren. Därmed har vi en felfri binär kanal om vi tolkar 0 och 1 som samma symbol. Då ska vi ha kapaciteten $\log_2(2) = 1$, vilket också stämmer med uttrycket ovan.

- d. Oavsett ϵ , så kan vi tillåta oss att tolka 0 och 1 som samma symbol. Vi får en felfri binär kanal. Vi kan alltså alltid kommunicera felfritt med en bit per kanalanvändning.

Mikael Olofsson
ISY/CommSys

www.liu.se