

# Signaler, information & bilder, föreläsning 14

Michael Felsberg och Maria Magnusson  
 Computer Vision Laboratory (Datorseende)  
 Department of Electrical Engineering (ISY)  
 michael.felsberg@liu.se,  
 maria.magnusson@liu.se



## Översikt

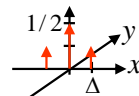
- 2D signalbehandling (bildbehandling) forts.
  - Faltningkärnor
    - Lågpassfiltrerade
    - Deriverande
    - Högpassfiltrerade
- Teori: Kap. 3.7, 3.8, 3.9, 3.10, 4
- Bygger på Maria Magnussons föreläsningar

Synonymer
■ Faltningkärna
■ Filterkärna
■ Filter
■ Operator
■ Kärna



Vad är 2D fouriertransformen av  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} / 4$ ?

- Sätt dirac-spikar  $\delta(x,y)=\delta(x)\delta(y)$  på varje element i faltningkärnan:
- Antag sampelavstånd  $\Delta$ . Detta ger



$$h(x, y) = [1 \cdot \delta(x + \Delta) + 2 \cdot \delta(x) + 1 \cdot \delta(x - \Delta)] \cdot \delta(y) / 4$$

- Tag 2D kontinuerlig Fouriertransform

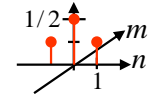
$$H(u, v) = [1 \cdot e^{+j2\pi\Delta u} + 2 + 1 \cdot e^{-j2\pi\Delta u}] \cdot 1(v) / 4 = [2 \cos(2\pi\Delta u) + 2] / 4 = \cos^2(\pi\Delta u)$$



p. 4

Hur beräknas 2D DFT:n av  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} / 4$ ?

- Här är faltningkärnan som  $f[n,m]$ :
- Sätt in  $f[n,m]$  i symmetriska varianten av DFT-formeln:



$$F(k, l) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \sum_{m=-M/2}^{M/2-1} f(n, m) e^{-j2\pi(nk/N + ml/M)} = 1/4 \cdot e^{-j2\pi(-1k/N + 0l/M)} + 1/2 \cdot e^{-j2\pi(0k/N + 0l/M)} + \dots + 1/4 \cdot e^{-j2\pi(1k/N + 0l/M)} = 0.5 \cos(2\pi k / N) + 0.5 = \cos^2(\pi k / N)$$

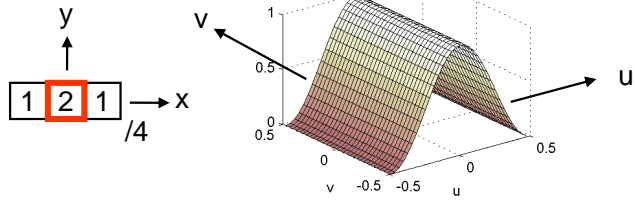


### Lågpassfiltrerande faltningskärna i x-led (u-led)

$$\cos^2(\pi\Delta u)$$

$\Delta = 1$  här

Fig. 3.12

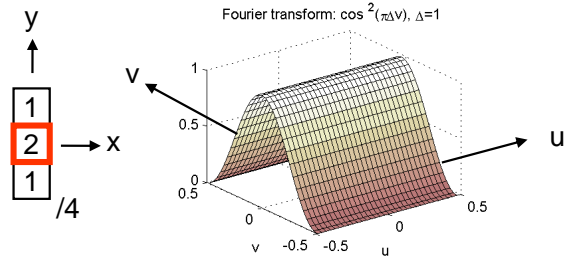


### Lågpassfiltrerande faltningskärna i y-led (v-led)

$$\cos^2(\pi\Delta v)$$

$\Delta = 1$  här

Fig. 3.12



### Lågpassfiltrerande faltningskärna i x- och y-led (u- och v-led)

$$\cos^2(\pi\Delta u) \cdot \cos^2(\pi\Delta v)$$

$\Delta = 1$  här

Dämpar höga frekvenser

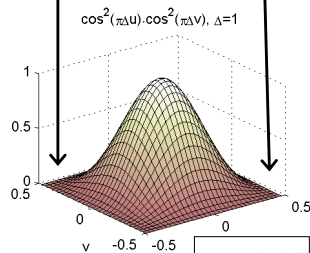
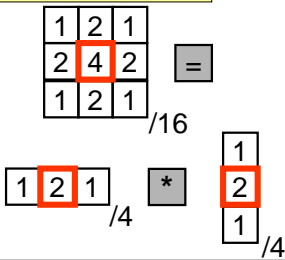


Fig. 3.12

### Mer lågpassfiltrerande faltningskärna i x- och y-led (u- och v-led)

$$\cos^4(\pi\Delta u) \cdot \cos^4(\pi\Delta v)$$

$\Delta = 1$  här

binomialfilter (approx. Gauss-filter)

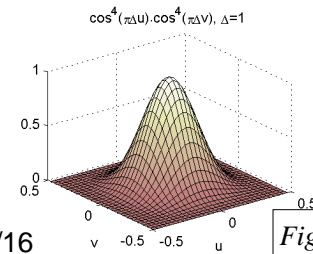
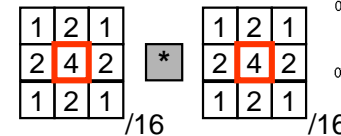
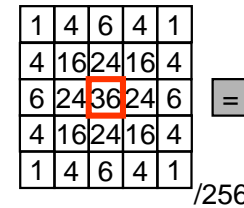


Fig. 3.12

### Lågpassfiltrering

Jämför med Fig. 3.13

1	4	6	4	1
4	16	24	16	4
6	24	36	24	6
4	16	24	16	4
1	4	6	4	1

/256

**li.u** LINKÖPINGS UNIVERSITET

### Lågpassfiltrering i Fourierdomänen

Jmf Fig. 3.13

**li.u** LINKÖPINGS UNIVERSITET

### Derivering kan ses som faltning med en deriveringsoperator

Antag att fouriertransformen av  $f(x)$  är  $F(u)$ , dvs

$$f(x) \leftrightarrow F(u)$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} \leftrightarrow j2\pi u \cdot F(u)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} * f(x) \leftrightarrow j2\pi u \cdot F(u)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \leftrightarrow j2\pi u$$

Derivering = Faltning med deriveringsoperator!

En faltningskärna vars fouriertransform liknar en rät linje i fourierdomänen kan användas som deriveringsoperator!

Fouriertransformen av en deriveringsoperator är en rät linje!

**li.u** LINKÖPINGS UNIVERSITET

### Motivering i spatialdomänen att $\frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ är en deriveringsoperator

Från gymnasiet:

Faltning,  $g=d*f$ :

$$f'(x_1) \approx \frac{f(x_1 + \Delta) - f(x_1 - \Delta)}{2\Delta}$$

$$g(x_1) = \frac{f(x_1 + \Delta)}{2\Delta} - \frac{f(x_1 - \Delta)}{2\Delta}$$

samma!

**li.u** LINKÖPINGS UNIVERSITET

## Motivering i fourierdomänen att

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \hline \end{bmatrix} / 2\Delta$  är en deriveringsoperator

- Sätta dirac-impulser på varje element i faltningskärnan med sampelvstånd  $\Delta$

$$h(x, y) = [1 \cdot \delta(x + \Delta) - 1 \cdot \delta(x - \Delta)] \cdot \delta(y) / 2\Delta$$

- Tag kontinuerlig Fouriertransform

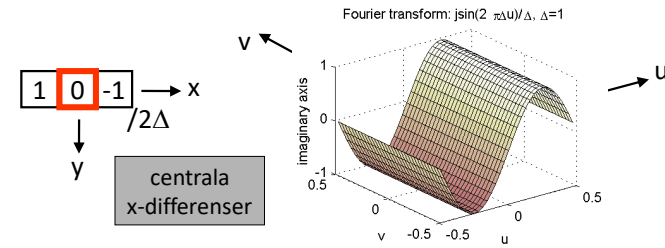
$$H(u, v) = [1 \cdot e^{+j2\pi\Delta u} - 1 \cdot e^{-j2\pi\Delta u}] \cdot 1(v) / 2\Delta = [j \sin(2\pi\Delta u)] / \Delta \rightarrow j2\pi u \text{ då } u \rightarrow 0$$

Den liknar en rät linje för låga frekvenser. Den beräknar derivatan bra för låga frekvenser och dämpar höga frekvenser.

## Deriverande (och lågpasfiltrerande) faltningskärna i x-led (u-led)

$$j \sin(2\pi\Delta u) / \Delta, \Delta = 1 \text{ här}$$

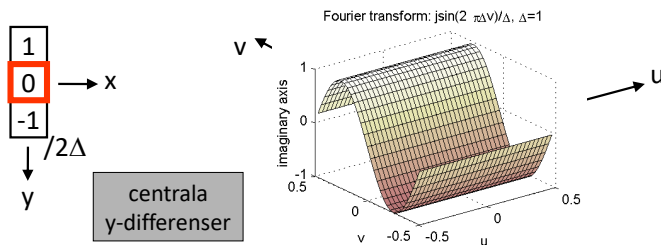
Fig. 3.17



## Deriverande (och lågpasfiltrerande) faltningskärna i y-led (v-led)

$$j \sin(2\pi\Delta v) / \Delta, \Delta = 1 \text{ här}$$

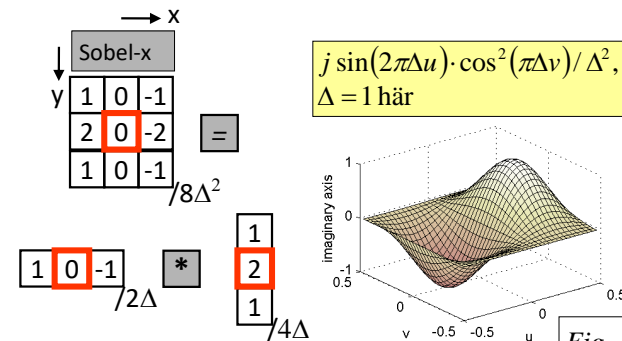
Fig. 3.17

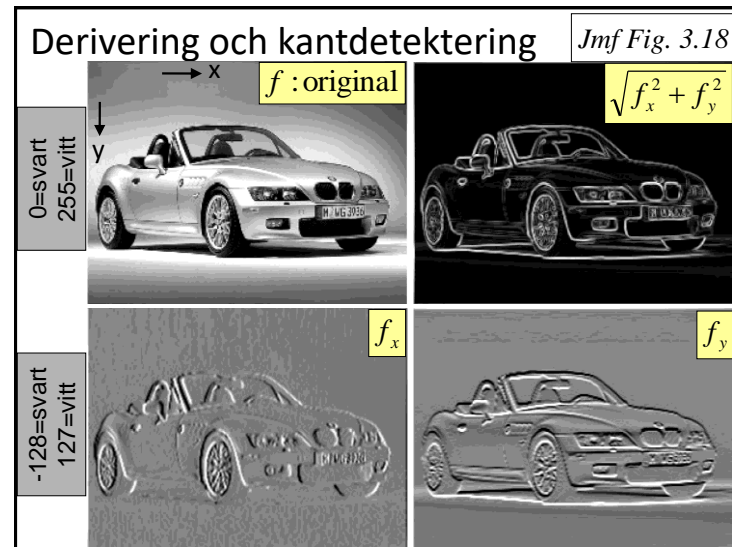
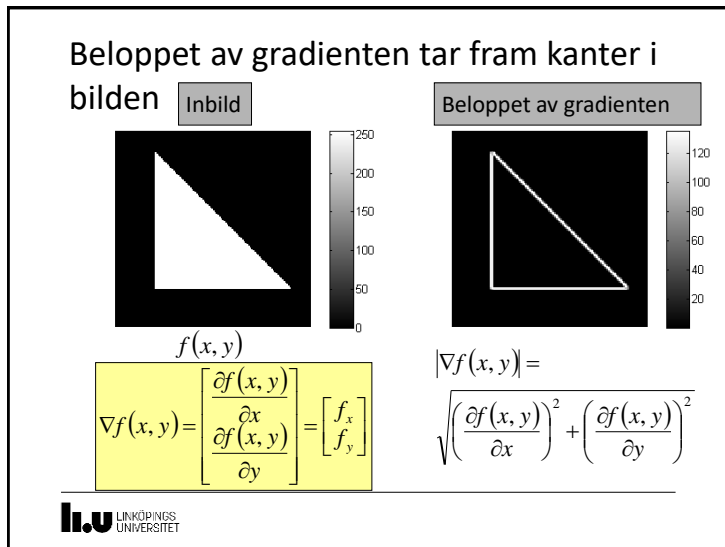
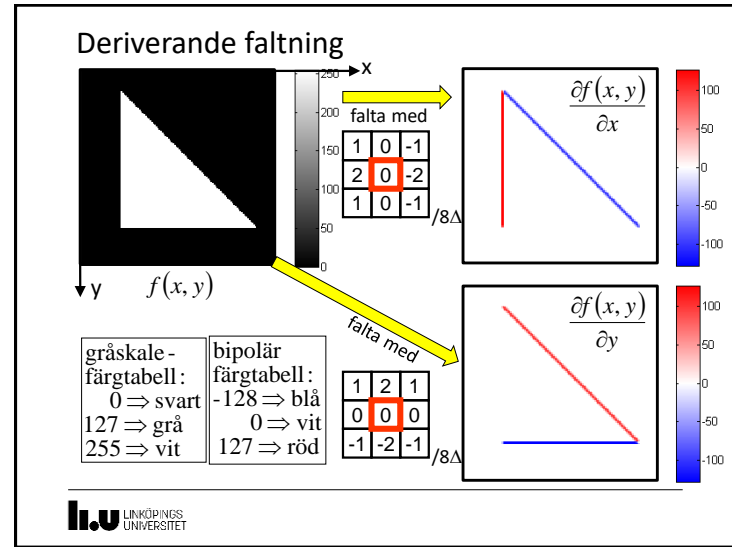
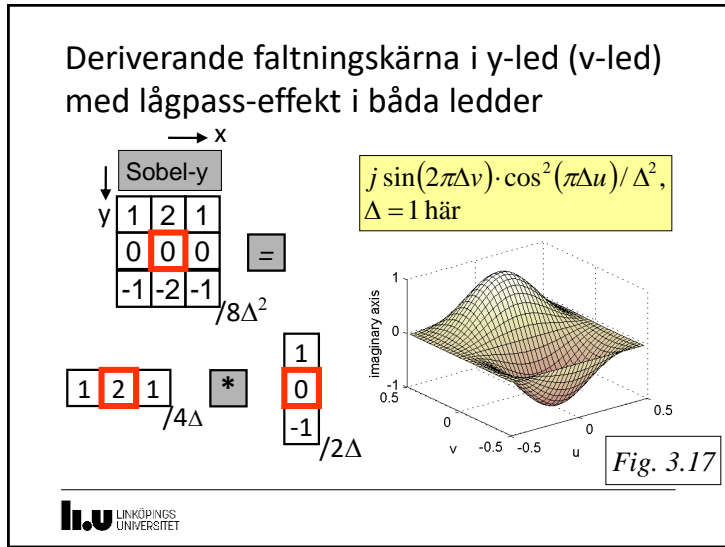


## Deriverande faltningskärna i x-led (u-led) med lågpas-effekt i båda lederna

$$j \sin(2\pi\Delta u) \cdot \cos^2(\pi\Delta v) / \Delta^2, \Delta = 1 \text{ här}$$

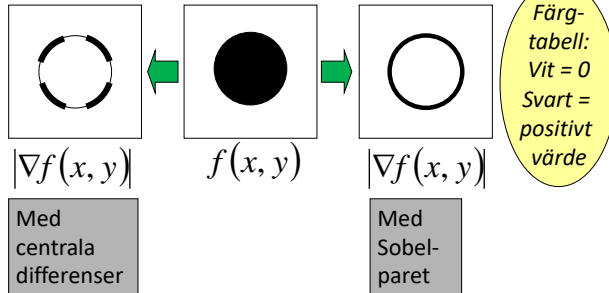
Fig. 3.17





## Rotationsinvarians

- önskvärt: derivata-filter-par är rotationsinvariant
- "kantstyrkan", absolutbeloppet av gradienten, inte bero av kantens rotationsläge



## Olika derivata-filter

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} / 2\Delta$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 6 & 0 & -6 & 1 \end{bmatrix} / 8\Delta$$

Ett filter  $\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} / \Delta$  med centrum mellan pixlarna

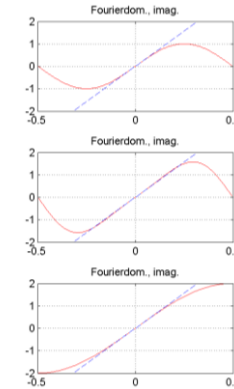


Fig. 3.15

## Linjär diskret faltning då centrum är mellan pixlarna

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} / \Delta * \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} / 2\Delta$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} / \Delta * \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} / 2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} / 2\Delta$$

basfilter (Haar wavelets)

## Ett idealt Laplace-filter beräknar 2:a-derivatan i x- och y-led

Laplaceoperatorn:  $\nabla^2(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

Fouriertransform:  $\mathfrak{F}[\nabla^2(x, y)] = -4\pi^2(u^2 + v^2)$

$|\mathfrak{F}[\nabla^2(x, y)]| = 4\pi^2(u^2 + v^2)$   
 är ett kraftigt högpasfilter i x - och y - led

Faltningskärna som approximerar det ideala Laplace-filtret

$$\Im[(1, -2, 1) / \Delta^2] = [e^{+j2\pi\Delta u} - 2 + e^{-j2\pi\Delta u}] / \Delta^2 = (2\cos(2\pi\Delta u) - 2) / \Delta^2 = -4 \cdot \sin^2(\pi\Delta u) / \Delta^2$$

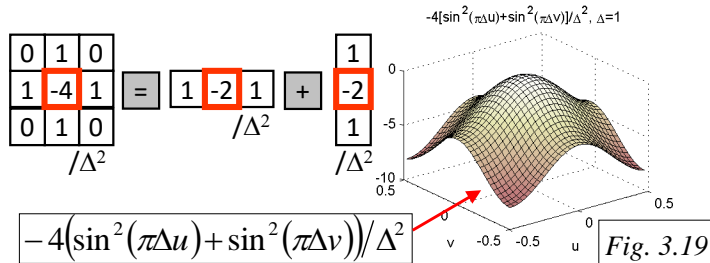


Fig. 3.19

-1 multiplicerat på det approximativa Laplace-filtret ger ett högpasfilter

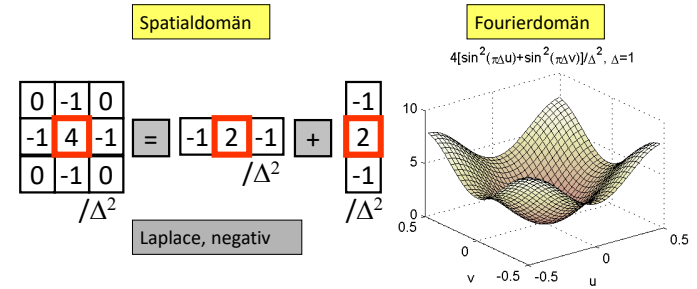


Fig. 3.19

Ex) användning av Laplace, negativ: Erhåll en bild med tydligare detaljer

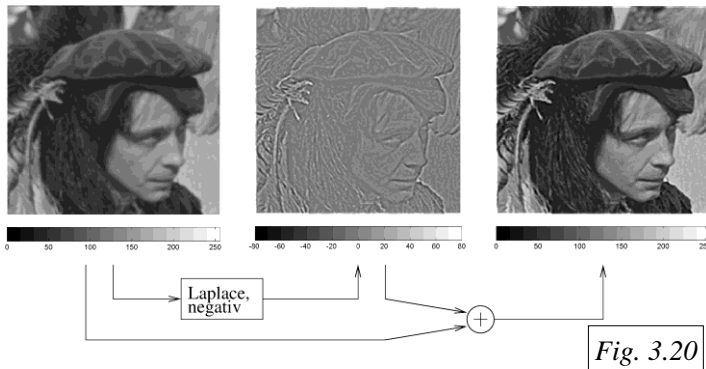


Fig. 3.20