TNA001- Matematisk grundkurs
Tentamen 2014-08-27 - Lösningsskiss

1. a)

$$\frac{x-3}{x} \leq \frac{1}{x-4} \Leftrightarrow \frac{x-3}{x} - \frac{1}{x-4} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-3)(x-4)-x}{x(x-4)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-8x+12}{x(x-4)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x-6)}{x(x-4)} \leq 0$$

Sedvanligt teckenschema visar att detta är uppfyllt $\Leftrightarrow x \in]0,2] \cup]4,6]$

Svar: Olikheten gäller för alla $x \in]0,2] \cup]4,6]$.

b) Vi har att $|3x-1| = \begin{cases} 3x-1 \text{ om } x \geq \frac{1}{3} \\ 1-3x \text{ om } x \leq \frac{1}{3} \end{cases}$ och $|x-4| = \begin{cases} x-4 \text{ om } x \geq 4 \\ 4-x \text{ om } x \leq 4 \end{cases}$.

Vi får tre fall:
$x \leq \frac{1}{3}$ ger oss ekvationen $1-3x = x+4-x \Leftrightarrow -3x = 3 \Leftrightarrow x = -1$, som är lösning.
$\frac{1}{3} \leq x \leq 4$ ger ekvationen $3x-1 = x+4-x \Leftrightarrow 3x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$, som duger.
$x \geq 4$ ger ekvationen $3x-1 = x+x-4 \Leftrightarrow x = -3$, som inte är lösning.

Svar: $x = -1$ eller $x = \frac{5}{3}$.

2. a) Linjens riktning = $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och eftersom t.ex. punkten $(4,-2,-2)$ ligger på linjen, så är $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, en ekvation för linjen.

Svar: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

b) Vi sätter in linjens ekvation i planets för att få villkor på parametern t vid ev. skärning.

$$4-2t-2+t-4 = 1 \Leftrightarrow t = -3$$

Med detta värde på t får vi skärningspunkten $(4-2(-3), -2-3, -2) = (10,-5,-2)$
(man kontrollerar lätt att denna punkt även tillhör planet)

Svar: Skärning i punkten $(10,-5,-2)$.

c) För att bestämma eventuell skärning undersöker vi lösning till systemet

$$\begin{cases} 4-2t = 1+s \\ -2+t = -2+2s \\ -2+0t = 0-s \end{cases}.$$

Men systemet saknar lösning, vilket innebär att linjerna inte skär varandra.

Svar: Linjerna saknar gemensam punkt.

3. a) Låt $z_1 = a+ib, a,b \in \mathbb{R}$ och $z_2 = c+id, c,d \in \mathbb{R}$. Vi får

A. $z_1 + \overline{z_1} = a+ib+a-ib = 2a = 2Re\, z_1$, v.s.v.

B. $z_2 \cdot \overline{z_2} = (c+id)(c-id) = c^2 - i^2d^2 = c^2+d^2 = \left(\sqrt{c^2+d^2}\right)^2 = |z_2|^2$, v.s.v.

C. $z_1 \cdot \overline{z_2}$ är ett (nytt) komplext tal. Låt $z_1 \cdot \overline{z_2} = z = x+iy, x,y \in \mathbb{R}$.
Alltså har vi $|z_1 \cdot \overline{z_2}| = |z| = \sqrt{x^2+y^2} \geq |x| \geq x = \text{Re}\, z = \text{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2})$, v.s.v.

b)

$$z = 2 + \frac{2-2i}{1+i} = \cdots = \cdots = 2(1-i) = 2\sqrt{2}e^{-i\pi/4} \Rightarrow$$

$$z^{50} = \left(2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{50} = 2^{75}e^{-i\frac{50\pi}{4}} = 2^{75}e^{-i\frac{\pi}{2}} = -2^{75}i$$

Svar: $-2^{75}i$

4. a) Se kurslitteraturen.

b) Summan av de n första udda talen är

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = [\text{aritmetisk summa}] = \frac{n}{2}\big(1 + (2n-1)\big) = n^2$$

Svar: Summan av de n första udda talen är n^2.

5. a) För definition krävs att $-1 \leq 2x - 1 \geq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 2x \geq 2 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$.

Svar: $D_f = [0,1]$.

b)

$$y = \arcsin(2x-1),\ x \in [0,1] \Leftrightarrow \sin y = 2x - 1, x \in [0,1] \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} + \frac{\sin y}{2}, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Svar: Inversen är $f^{-1}(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sin x}{2}$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

c) Både f och f^{-1} är strängt växande. Vi har

$$f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sin\frac{1}{2}}{2} > 0, \text{medan } f\left(\frac{1}{2}\right) = \arcsin(0) = 0,$$

d.v.s. $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) > f\left(\frac{1}{2}\right)$

Vidare

$$f^{-1}(1) = \frac{1}{2} + \frac{\sin 1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{\pi/3}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6}$$

och

$$f(1) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}.$$

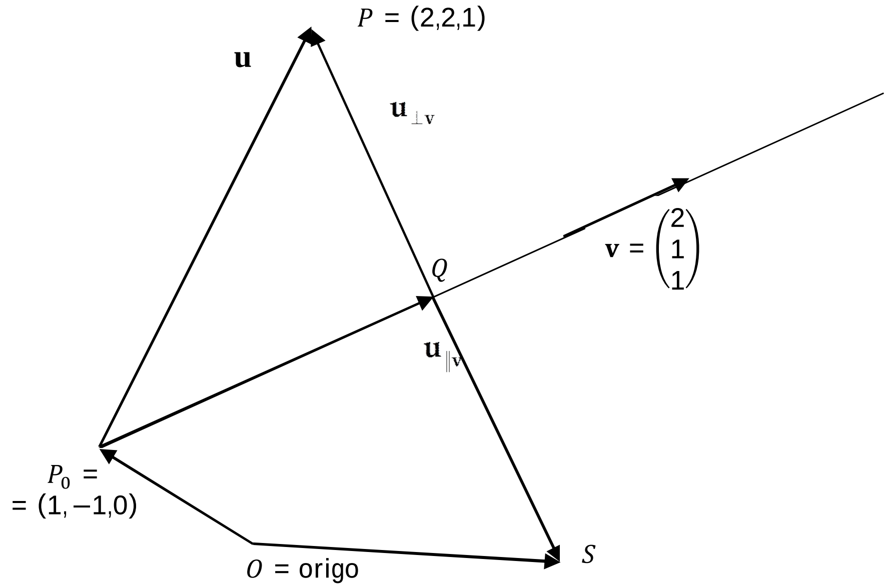
Då gäller att

$$f(1) - f^{-1}(1) > \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$$

d.v.s. $f^{-1}(1) < f(1)$

Eftersom $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) > f\left(\frac{1}{2}\right)$ och $f^{-1}(1) < f(1)$, så "byter" funktion och invers storleksordning för något x mellan $x = \frac{1}{2}$ och $x = 1$, vilket innebär att kurvorna skär varandra i detta intervall, d.v.s. $\frac{1}{2} < x_0 < 1$, v. s. v.

6. Vi ritar först en figur och bildar vektorn $\mathbf{u} = \overrightarrow{P_0P} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$



Vi söker koordinaterna för punkten S och bestämmer därför denna punkts ortsvektor $\overrightarrow{OS}$. Vi har

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP_0} + \mathbf{u} - 2\mathbf{u}_{\perp\mathbf{v}},$$

där

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix},$$

och (projektionsformeln)

$$\mathbf{u}_{\perp\mathbf{v}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\parallel\mathbf{v}} = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}}{6}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} - 1\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}.$$

Alltså

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP_0} + \mathbf{u} - 2\mathbf{u}_{\perp\mathbf{v}} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix},$$

vilket innebär att $S = (4, -2,1)$.

7. Sambandet $x^n - 1 = (x-1)\sum_{k=1}^{n} x^{n-k}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, skall visas. Vi bevisar påståendet med hjälp av ett induktionsbevis.

STEG 1 $P(1)$: $V(1) = x^1 - 1 = x - 1$, medan $H(1) = (x-1)\cdot\sum_{k=1}^{1} x^{1-k} = (x-1)\cdot x^{1-1} = x-1$.

Alltså $V(1) = H(1)$ d. v. s. $P(1)$ gäller.

STEG 2 Vi antar att $P(p)$ gäller för godtyckligt fixt tal $p \in \mathbb{Z}^+$, d.v.s. vi antar att

$$H(p) = (x-1)\sum_{k=1}^{p} x^{p-k} = x^p - 1 = V(p)$$

Detta medför att

$$H(p+1) = (x-1)\sum_{k=1}^{p+1} x^{p+1-k} = (x-1)\cdot\left(\left(\sum_{k=1}^{p} x^{p+1-k}\right) + x^{p+1-(p+1)}\right) = (x-1)\left(x\sum_{k=1}^{p} x^{p-k} + x^0\right) =$$

$$= x(x-1)\sum_{k=1}^{p} x^{p-k} + (x-1) = \text{/enligt antagandet/} = x(x^p - 1) + (x-1) = x^{p+1} - x + x - 1 =$$

$$= x^{p+1} - 1 = V(p+1)$$

d.v.s. $H(p) = V(p) \Rightarrow H(p + 1) = V(p + 1)$

STEG 3 Enligt steg 1 gäller påståendet för $n = 1$. Då gäller det enligt steg 2 även för $n = 1 + 1 = 2$. Men då gäller det även för $n = 2 + 1 = 3$ o.s.v. Via matematisk induktion har vi alltså visat att påståendet gäller för alla $n \in \mathbb{Z}^+$.