TSKS21 Signaler, information & bilder

Föreläsning 7
Signaler och system – frekvensdomänen, tidsdiskreta fourierserier och fouriertransformer samt fönstring och DFT

Mikael Olofsson
Institutionen för Systemteknik (ISY)
Ämnesområdet Kommunikationssystem

LINKÖPINGS UNIVERSITET

Tidskontinuerlig fouriertransform

Krav på signalen $x(t)$:

- Absolutintegrerbar: $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt < \infty$
- Ändligt antal diskontinuiteter.
- Begränsad variation: $\int_{-\infty}^{\infty} |x'(t)|\, dt < \infty$

Transform:

$$X(\omega) = \mathscr{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt$$

Inverse transform:

$$x(t) = \mathscr{F}^{-1}\{X(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t} d\omega$$

- Spektrum av $x(t)$: $X(\omega)$
- Amplitudspektrum: $|X(\omega)|$
- Fasspektrum: $\arg\{X(\omega)\}$

Viktig egenskap: Derivator

Notation: $X(\omega) = \mathscr{F}\{x(t)\}$

Vi har: $$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\frac{d}{dt}e^{j\omega t}\, d\omega \;= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{X(\omega)\, j\omega e^{j\omega t}}_{\mathscr{F}\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\}}\, d\omega$$

Resultat: $$\mathscr{F}\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\} = j\omega X(\omega)$$

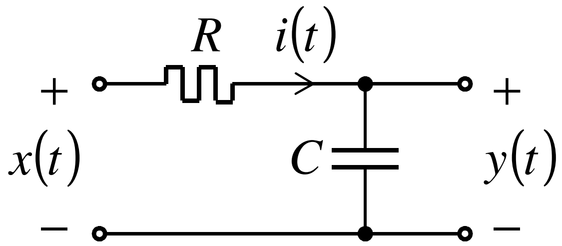
$$\mathscr{F}\left\{\frac{d^k}{dt^k}x(t)\right\} = (j\omega)^k X(\omega)$$

Jämför med impedanser i $j\omega$-metoden.

Viktig egenskap: Derivator – exempel

Notation: $X(\omega) = \mathscr{F}\{x(t)\}$ Vi har: $\mathscr{F}\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\} = j\omega X(\omega)$

Exempel:



Energifritt: $y(t)$ initialt 0.

Kapacitans: $i(t) = C\frac{d}{dt}y(t)$ (1)

Resistans: $x(t) - y(t) = Ri(t)$ (2)

(1) i (2) $\Rightarrow x(t) - y(t) = RC\frac{d}{dt}y(t)$

$\Rightarrow RC\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = x(t)$

Transform $\Rightarrow$

$j\omega RCY(\omega) + Y(\omega) = X(\omega)$

$\Rightarrow (j\omega RC + 1)Y(\omega) = X(\omega)$

$\Rightarrow Y(\omega) = \frac{1}{j\omega RC + 1}X(\omega)$

Transform och inverstransform görs vanligen med en tabell.

Signaleffekt och signalenergi – Parseval

Signaleffekt: $|x(t)|^2$ Signalenergi: $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt$

Parsevals relation, TK fouriertransform (specialfall):

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t) \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} \, d\omega \, x^*(t) \, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{j\omega t} \, dt \, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) X^*(\omega) \, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 \, d\omega$$

Energispektrum: $|X(\omega)|^2$

Parsevals relation (generellt): $\int_{-\infty}^{\infty} a(t) b^*(t) \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) B^*(\omega) \, d\omega$

Tidsdiskreta fourierserier och -transformer

TD fourierserier

Krav på signalen $x[k]$: Periodisk, period K_0.

$$x[k] = \sum_{n=0}^{K_0-1} D_n e^{jkn\Omega_0} \qquad D_n = \frac{1}{K_0} \sum_{k=0}^{K_0-1} x[k] e^{-jkn\Omega_0} \qquad \Omega_0 = 2\pi / K_0$$

TD fouriertransform

Krav på signalen $x[k]$: Icke-periodisk. Absolutsummerbar.

$$x[k] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\Omega) e^{-jk\Omega} d\Omega \qquad X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-jk\Omega}$$

Periodisk med period 2π.

Egenskaper hos fourierserieutveckling

Låt $x[k]$ och $y[k]$ vara periodiska signaler med period K, normerad vinkelfrekvens Ω_0 och fourierseriekoefficienter C_n respektive D_n.

Signal	Fourierseriekoefficient # n
$ax[k]+by[k]$	aC_n+bD_n
$x[k-k_0]$	$C_n e^{-jn\Omega_0 k_0}$
$x[-k]$	C_{-n}

Utsignal från ett tidsdiskret LTI-system

Notation: $\quad A(\Omega) = \mathscr{F}\{a[k]\} \qquad B(\Omega) = \mathscr{F}\{b[k]\}$

Egenskap:
$$\mathscr{F}\{(a*b)[k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (a*b)[k]\, e^{-j\Omega k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[n] b[k-n] e^{-j\Omega k}$$
$$= \Big/ m = k - n \Big/ = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[n] b[m] e^{-j\Omega(n+m)}$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[n] e^{-j\Omega n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} b[m] e^{-j\Omega m} = A(\Omega) B(\Omega)$$

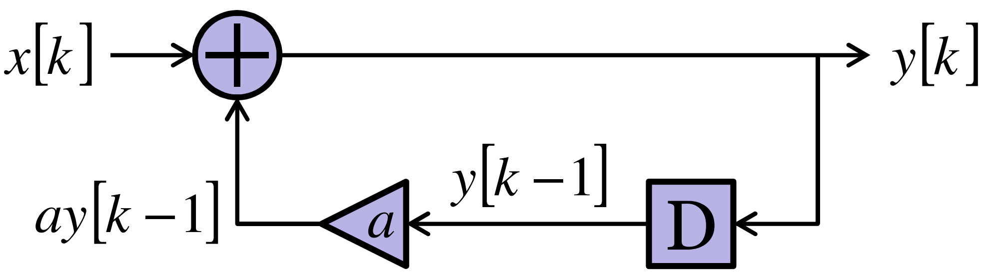
LTI-system:

$$\begin{array}{c} x[k] \\ X(\Omega) \end{array} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} h[k] \\ H(\Omega) \end{array}} \longrightarrow \begin{array}{c} y[k] = (x*h)[k] \\ Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega) \end{array}$$

Viktig egenskap: Fördröjning – exempel

Notation: $X(\Omega) = \mathscr{F}\{x[k]\}$ Vi har: $\mathscr{F}\{x[k-k_0]\} = e^{-jk_0\Omega}X(\Omega)$

Exempel:



Energifritt:
$y[k]$ initialt 0.

Ur figur: $y[k] = x[k] + ay[k-1]$

$\Rightarrow \quad y[k] - ay[k-1] = x[k]$

Transformera $\Rightarrow$

$$Y(\Omega) - ae^{-j\Omega}Y(\Omega) = X(\Omega)$$

$$\Rightarrow \quad \left(1 - ae^{-j\Omega}\right)Y(\Omega) = X(\Omega)$$

$$\Rightarrow \quad Y(\Omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}}X(\Omega)$$

Mera Parseval

För TK fouriertransform:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 \, d\omega$$

För TK fourierserie:

$$\frac{1}{T_0} \int_{0}^{T_0} |x(t)|^2 \, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |D_n|^2$$

För TD fouriertransform:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} |X(\Omega)|^2 \, d\Omega$$

För TD fourierserie:

$$\frac{1}{K_0} \sum_{k=0}^{K_0-1} |x[k]|^2 = \sum_{n=0}^{K_0-1} |D_n|^2$$

DFT – Diskret fouriertransform

Tidsdiskret signal med begränsad tidsutbredning:

$$x[k] = 0 \quad \text{för} \quad k \notin \{0, 1, \ldots, N-1\}$$

Fouriertransform: $$X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-jk\Omega} = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] e^{-jk\Omega}$$ Kont. m. period 2π.

DFT av längd *L*: $$X_L(n) = X\left(\frac{n}{L}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] e^{-j2\pi \frac{n}{L} k} \quad \text{för} \quad n \notin \{0, 1, \ldots, L-1\}$$

IDFT – Inversen till diskret fouriertransform

IDFT: $x_L[k] = \frac{1}{L}\sum_{n=0}^{L-1} X_L(n) e^{j2\pi\frac{n}{L}k} \quad \Rightarrow \quad x_L[k+L] = x_L[k]$

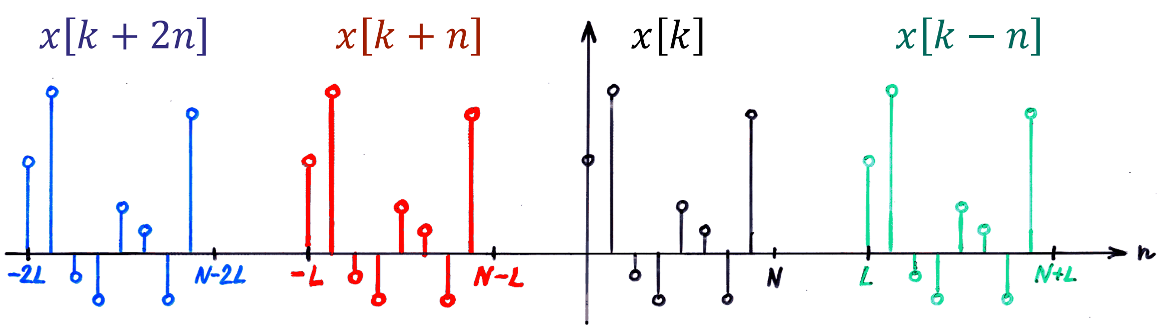
Diskret med period L.

Förhållande till $x[k]$:

$$x_L[k] = \frac{1}{L}\sum_{n=0}^{L-1}\sum_{m=0}^{N-1} x[m] e^{-j2\pi\frac{n}{L}m} e^{j2\pi\frac{n}{L}k} = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] \underbrace{\frac{1}{L}\sum_{n=0}^{L-1} e^{-j2\pi(m-k)\frac{n}{L}}}_{= \begin{cases} L, & m = k \mod L \\ 0, & \text{för övrigt} \end{cases}} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[k-iL]$$

Om $L<N$ så får vi överlapp mellan de olika kopiorna. Detta kallas vikning.

Därför: Krav $L \geq N$



DFT – Periodisk faltning

Vi är vana vid: $Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad y[k] = (x * h)[k]$

Men vi har: $y[k] = x[k]h[k] \quad \Leftrightarrow \quad Y(\Omega) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(\Phi)H(\Omega - \Phi)d\Phi$

Med DFT: $Y_L(n) = X_L(n)H_L(n) \quad \Leftrightarrow \quad y_L[k] = \sum_{m=0}^{L-1} x_L[m]h_L[k-m]$

Men också: $y_L[k] = x_L[k]h_L[k] \quad \Leftrightarrow \quad Y_L(n) = \frac{1}{L}\sum_{m=0}^{L-1} X_L(m)H_L(n-m)$

Mikael Olofsson

ISY/KS

www.liu.se

LINKÖPINGS UNIVERSITET