Tentamen
TNA001 – Matematisk grundkurs

Datum:	2016-10-28
Tid:	08.00 – 13.00
Kurskod:	TNA001
Provkod:	TEN1
Institution:	ITN
Examinator:	Sixten Nilsson
Hjälpmedel:	Inga, förutom skriv- och ritmateriel

Bedömningsgrunder och beskrivning av vad som menas med en fullständig lösning

Uppgifterna på denna tentamen bedöms genom att varje uppgift poängsätts med 0 - 6 poäng. Om inte annat framgår av texten, skall **fullständig lösning** lämnas. Med detta menas att följande moment skall i *lämplig omfattning* ingå i lösningen:

1. Lösningen skall ha förklarande text med förklaringar på vad som görs och varför det får göras. En hänvisning till teorin kan här vara lämpligt. Även en figur kan vara ett bra stöd i detta arbete.
2. Lösningen skall ha en struktur som är lätt att följa.
3. Lösningen skall innehålla en kalkyldel där det går att följa hur resultaten har uppkommit.
4. Lösningen skall ha ett tydligt angivet svar/resultat som är kopplat till den fråga som är ställd.
5. Svaret/resultatet skall där så är lämpligt utvärderas, dvs. prövningar skall genomföras som säkrar resultatet

Poängsättningen vid rättningen tar hänsyn till hur väl samtliga delar ovan är genomförda.

Betyg

Betyg	Poäng på tentamen (inklusive bonuspoäng)
5	≥ 36 , varav minst 2p på var och en av de fem första uppgifterna
4	28 – 35, varav minst 2p på var och en av de fem första uppgifterna
3	20 – 27, varav minst 2p på var och en av de fem första uppgifterna
U	0 – 19

Lösningsskisser kommer att finnas på kurshemsidan http://webstaff.itn.liu.se/~sixni/TNA001.htm i samband med tentamenstidens slut.

1. Bestäm alla reella x för vilka det gäller att

a) $\dfrac{x-1}{x} \geq 2$ b) $|x-1| = 2|x-2| - x$.

2. I en ON-bas har linjen L_1 ekvationen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$, och linjen L_2 har ekvationen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$.

a) Beräkna det kortaste avståndet mellan punkten $P = (4,1,1)$ och linjen L_1.

b) Visa att punkten $(8,4,-4)$ är gemensam för de båda linjerna.

c) Bestäm en ekvation för det plan som innehåller både L_1 och L_2.

3. a) Som bekant gäller sambanden $\sin(-v) = -\sin v$ respektive $\cos(-v) = \cos v$ för alla $v \in \mathbb{R}$. Låt t.ex. punkten $(\cos v, \sin v)$ vara en *godtycklig* punkt i första kvadranten på en enhetscirkel och illustrera dessa två samband i denna enhetscirkel. Figuren, som skall ritas tydligt, skall också kommenteras på något relevant sätt.

b) Bestäm alla reella lösningar till ekvationen
$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin x.$$

c) Låt
$$f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right).$$

Bestäm, på så stort intervall som möjligt, en invers f^{-1} till f. Ange även inversens definitionsmängd och värdemängd.

4. Låt z_1 och z_2 vara de komplexa talen $z_1 = 4 - 4i$ respektive $z_2 = e^{i\pi/6}$.

a) Beräkna $(z_1 z_2)^{12}$ och ange svaret på formen $x + iy$ där x och y är reella tal, som får skrivas på potensform.

b) Markera i ett komplext talplan alla komplexa tal z som uppfyller villkoren
$$\begin{cases} \arg z_1 \leq \arg z \leq \arg z_2 \\ |z-1| \leq 1 \end{cases},$$

och om vi här låter argumenten för de komplexa talen tillhöra intervallet $]-\pi, \pi]$.

5. a) Bestäm alla reella värden på x som är lösningar till ekvationen
$$\ln(x-1) + \ln(x-2) + \ln(x+3) = \ln 12.$$

b) Bestäm alla reella värden på x som uppfyller olikheten
$$\ln(x-1) + \ln(x-2) + \ln(x+3) \leq \ln 12.$$

6. Visa att för varje heltal $n \geq 1$ gäller det att
$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2.$$

Vänd!

7. Ett alternativt sätt att definiera skalärprodukt är följande:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{4}(|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2).$$

Låt **u** och **v** vara tvådimensionella vektorer och använd denna alternativa definition för att

a) visa att det i en ON-bas ger ”den vanliga” skalärprodukten uttryckt i koordinater.

b) bestämma värdet av $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ om **u** och **v** är vinkelräta.

Anmärkning: Du skall inte, varken i a) eller b), utgå från den definition av skalärprodukt, inklusive räkneregler för denna, som tidigare gjorts inom kursens ram.