TNA001- Matematisk grundkurs
Tentamen 2019-01-07 - Lösningsskiss

1.a) Prövning ger att $x = 2$ är en lösning till ekvationen. Faktorsatsen ger då att $x - 2$ är en faktor till polynomet i vänstra ledet i ekvationen.
Polynomdivision ger

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x - 2} = x^2 + 4x + 3$$

vilket ger ekvationen $(x - 2)(x^2 + 4x + 3) = 0$.

Nollprodukt ger då $x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x = -3, x = -1$.

Svar: $x = -3, x = -1, x = 2$

b) Vi får

$$\frac{5x+6}{x} \geq x^2 + 2x \Leftrightarrow \frac{5x+6}{x} - (x^2 + 2x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{5x + 6 - x(x^2 + 2x)}{x} \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x} \leq 0 \Leftrightarrow //\text{Teckenschema}// \Leftrightarrow x \in [-3, -1] \cup \,]0, 2].$$

Svar: $x \in [-3, -1] \cup \,]0, 2]$

2.a) Vi får

$$\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\right)$$
$$\Leftrightarrow \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6} - 2x\right) \Leftrightarrow 3x + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} - 2x + n \cdot 2\pi \text{ eller } 3x + \frac{\pi}{6} = -\left(\frac{5\pi}{6} - 2x\right) + n \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow 5x = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi \text{ eller } x = -\pi + n \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{15} + n \cdot \frac{2\pi}{5} \text{ eller } x = -\pi + n \cdot 2\pi.$$

Svar: $x = \frac{2\pi}{15} + n \cdot \frac{2\pi}{5}$ eller $x = -\pi + n \cdot 2\pi, n \in \mathbb{Z}$

b) Vi får $\tan v = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{1}{2}$ vilket ger $\cos v = 2 \sin v$. Trigonometriska ettan $\cos^2 v + \sin^2 v = 1$ ger då $4\sin^2 v + \sin^2 v = 1 \Leftrightarrow 5\sin^2 v = 1 \Leftrightarrow \sin v = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ som ger $\cos v = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$. I intervallet $< v < \frac{3\pi}{2}$ fås då $\sin v = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ och $\cos v = -\frac{2}{\sqrt{5}}$. Detta ger $\tan 2v = \frac{\sin 2v}{\cos 2v} = \frac{2 \sin v \cos v}{\cos^2 v - \sin^2 v} = \frac{2\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}{\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{4}{3}$.

Svar: $\tan 2v = \frac{4}{3}$

c) Eulers formler ger

$$\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}(e^{3ix} + 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} + e^{-3ix})$$
$$= \frac{1}{8}(3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{3ix} + e^{-3ix}) = \frac{1}{4}\left(\frac{3e^{ix} + 3e^{-ix}}{2} + \frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x) = \frac{3\cos x + \cos 3x}{4} \text{ V.S.V.}$$

3.a) Vi får $z = \frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-2i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} + \frac{1+2i}{(1-2i)(1+2i)} = \ ... = \frac{7}{10} - \frac{1}{10} i$ som ger $|z| = \sqrt{\left(\frac{7}{10}\right)^2 + \left(-\frac{1}{10}\right)^2} = \ ... = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

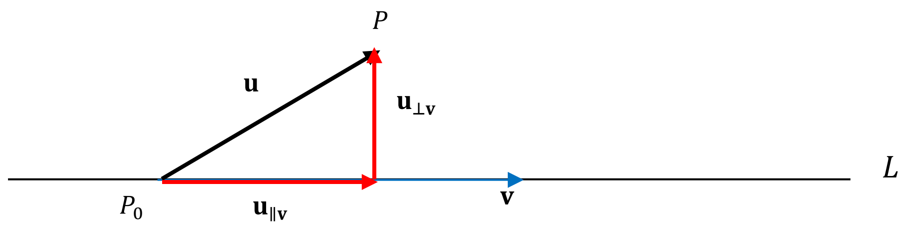
Svar: $|z| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

b) Vi får $\left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)^{20} = \left(2e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)^{20} = 2^{20}e^{-\frac{20\pi}{4}i} = 2^{20}e^{-5\pi i} = 2^{20}e^{-\pi i} = 2^{20}(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi))$
$= 2^{20}(-1+0) = -2^{20}$.

Svar: $\left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)^{20} = -2^{20}$

c) Vi får $Re\left(\frac{1}{a+bi} - \frac{1}{a-bi}\right) = Re\left(\frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} - \frac{a+bi}{(a-bi)(a+bi)}\right) = Re\left(\frac{a-bi-a-bi}{a^2+b^2}\right) = Re\left(\frac{-2b}{a^2+b^2} i\right) = 0$ V.S.V.

4.a) Vi ritar en figur.
Vi söker det kortaste avståndet från P till L. Detta ges av $|\mathbf{u}_{\perp\mathbf{v}}|$. Se figur.



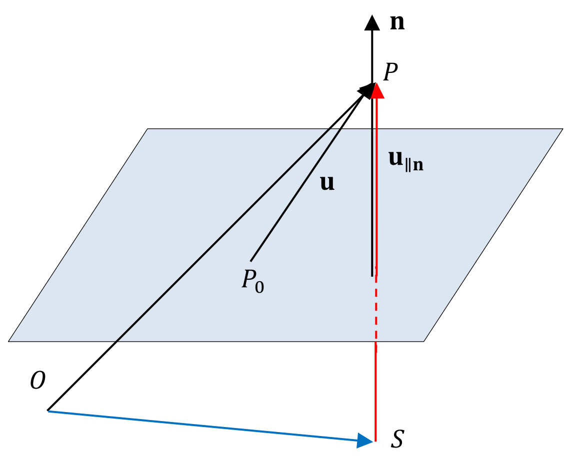
Vi bildar en vektor från linjen till punkten och får $\mathbf{u} = P_0P = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Vi får, med linjens riktningsvektor $\mathbf{v}$,

$$\mathbf{u}_{\perp\mathbf{v}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\parallel\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

som ger avståndet $\left|\mathbf{u}_{\parallel\mathbf{n}}\right| = 2\sqrt{2}$ l.e.

b) P:s spegelbild, S, i planet sökes. Vi ritar en figur.



Vi bildar en vektor från planet till punkten P och får $\mathbf{u} = P_0P = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Vektoraddition ger

$$\overrightarrow{OS} + 2\mathbf{u}_{\parallel\mathbf{n}} = \overrightarrow{OP} \Leftrightarrow \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} - 2\mathbf{u}_{\parallel\mathbf{n}}$$

och vi får ortsvektorn

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} - 2\mathbf{u}_{\parallel\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

vilket ger spegelpunkten $S = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Svar: Spegelpunkten är $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

5.a) Egenskaperna hos ln-funktionen ger att $D_f =]2, \infty[$ och $V_f = \mathbb{R}$.
Vi får då $y = 3 + \ln(x-2) \Leftrightarrow y - 3 = \ln(x-2) \Leftrightarrow x - 2 = e^{y-3} \Leftrightarrow x = 2 + e^{y-3}$ (entydigt) ger med variabelbyte $f^{-1}(x) = 2 + e^{x-3}$ med $D_{f^{-1}} = V_f = \mathbb{R}$ och $V_{f^{-1}} = D_f =]2, \infty[$.

Svar: Inversen är $f^{-1}(x) = 2 + e^{x-3}$ med $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ och $V_{f^{-1}} =]2, \infty[$.

b) Vi får från definitionen av absolutbelopp

$I_1 \colon x \leq -2$

$$\begin{gathered} -x - 2 \geq x(-x+1) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 - 2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(x - \left(1 - \sqrt{3}\right)\right)\left(x - \left(1 + \sqrt{3}\right)\right) \geq 0 \\ \Leftrightarrow [\text{teckenstudium}] \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, 1 - \sqrt{3}\right] \cup \left[1 + \sqrt{3}, \infty\right[\end{gathered}$$

Vilket i intervallet ger $L_1 = \left(\left]-\infty, 1 - \sqrt{3}\right] \cup \left[1 + \sqrt{3}, \infty\right[\right) \cap]-\infty, -2] =]-\infty, -2]$.

$I_2 \colon -2 \leq x \leq 1$

$$x + 2 \geq x(-x+1) \Leftrightarrow x^2 + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

Vilket i intervallet ger $L_2 = \mathbb{R} \cap [-2, 1] = [-2, 1]$.

$I_3 \colon x \geq 1$

$$\begin{gathered} x + 2 \geq x(x-1) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 - 2 \leq 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \left(x - \left(1 - \sqrt{3}\right)\right)\left(x - \left(1 + \sqrt{3}\right)\right) \leq 0 \\ \Leftrightarrow [\text{teckenstudium}] \Leftrightarrow x \in \left[1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}\right] \end{gathered}$$

Vilket i intervallet ger $L_3 = \left[1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}\right] \cap [1, \infty[= \left[1, 1 + \sqrt{3}\right]$.

Lösningsmängden till olikheten blir då $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = \left]-\infty, 1 + \sqrt{3}\right]$.

Svar: Lösningsmängden till olikheten är $x \in \left]-\infty, 1 + \sqrt{3}\right]$.

6.a) Om talföljdens kvot = q, så ger oss de givna villkoren

$$\begin{cases} a_4 = a_1 q^{4-1} = 8 \\ a_7 = a_1 q^{7-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 q^3 = 8 \\ a_1 q^6 = 1 \end{cases}.$$

Ledvis division ger

$$\frac{a_1 q^6}{a_1 q^3} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow q^3 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow q = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$$

som ger

$$a_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 8 \Leftrightarrow a_1 = 64.$$

Alltså har vi

$$a_n = 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, n = 1,2,3, \ldots$$

Som ger $a_{10} = 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10-1} = \frac{2^6}{2^9} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.

Svar: En formel för talföljden är $a_n = 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, n = 1,2,3, \ldots$ och $a_{10} = \frac{1}{8}$.

b) Funktionernas egenskaper ger att $x \in \left]0, \frac{1}{3}\right[$. För dessa värden på x fås

$$\arctan 2x = \arccos 3x \Leftrightarrow \tan(\arctan 2x) = \tan(\arccos 3x) \Leftrightarrow 2x = \frac{\sin(\arccos 3x)}{\cos(\arccos 3x)}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\sin(\arccos 3x)}{3x} \Leftrightarrow \left[\cos^2 v + \sin^2 v = 1 \Leftrightarrow \sin v = \pm\sqrt{1 - \cos^2 v}\right]$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos 3x)}}{3x} \Leftrightarrow 2x = \frac{\sqrt{1 - 9x^2}}{3x} \Leftrightarrow 6x^2 = \sqrt{1 - 9x^2}$$

$$\Leftrightarrow 36x^4 = 1 - 9x^2 \Leftrightarrow 36x^4 + 9x^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ \ldots \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{6} \text{ (den negativa roten är ej en lösning).}$$

Svar: $x = \frac{\sqrt{3}}{6}$

7. Induktionsbevis ger

Steg 1: För $n = 1$ fås

$$\text{VL}(1) = \sum_{k=1}^{1} \frac{k+2}{3^k} = \frac{1+2}{3^1} = 1 \text{ och } \text{HL}(1) = \frac{7}{4} - \frac{7+2}{4 \cdot 3^1} = 1 \text{ d.v.s. } VL(1) = HL(1).$$

Steg 2: Antag att påståendet är sant för något $p \in \mathbb{Z}^+$, d.v.s. $\sum_{k=1}^{p} \frac{k+2}{3^k} = \frac{7}{4} - \frac{7+2p}{4 \cdot 3^p}$, vilket ger

$$\text{VL}(p+1) = \sum_{k=1}^{p+1} \frac{k+2}{3^k} = \sum_{k=1}^{p} \frac{k+2}{3^k} + \frac{p+1+2}{3^{p+1}} = [\text{enligt antagandet}] = \frac{7}{4} - \frac{7+2p}{4 \cdot 3^p} + \frac{p+3}{3^{p+1}}$$

$$= \frac{7}{4} - \frac{7+2p}{4 \cdot 3^p} + \frac{p+3}{3^{p+1}} = \frac{7}{4} - \frac{21+6p}{4 \cdot 3^{p+1}} + \frac{4p+12}{4 \cdot 3^{p+1}} = \frac{7}{4} - \frac{21+6p-4p-12}{4 \cdot 3^{p+1}} = \frac{7}{4} - \frac{9+2p}{4 \cdot 3^{p+1}} = \frac{7}{4} - \frac{7+2+2p}{4 \cdot 3^{p+1}}$$

$$= \frac{7}{4} - \frac{7+2+2p}{4 \cdot 3^{p+1}} = \frac{7}{4} - \frac{7+2(p+1)}{4 \cdot 3^{p+1}} = \text{HL}(p+1).$$

Vi har alltså visat att om påståendet är sant för $n = p$ så är det också sant för $n = p + 1$.

Steg 3: Sambandet gäller enligt Steg 1 för $n = 1$. Enligt Steg 2 gäller det då även för $n = 1 + 1 = 2$. Då gäller det även för $n = 2 + 1 = 3$ och $n = 3 + 1 = 4$ o.s.v.
Alltså gäller $\sum_{k=1}^{n} \frac{k+2}{3^k} = \frac{7}{4} - \frac{7+2n}{4 \cdot 3^n}$ för alla $n \in \mathbb{Z}^+$, V.S.V.