

TNA001- Matematisk grundkurs

Tentamen 2012-10-20 - Lösningsskiss

1. a)

$$x + 2 \geq \frac{3}{x} \Leftrightarrow x + 2 - \frac{3}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x - 3}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+3)}{x} \geq 0$$

Sedvanligt teckenschema visar att detta är uppfyllt $\Leftrightarrow x \in [-3, 0] \cup [1, \infty[$.

Svar: $x \in [-3, 0] \cup [1, \infty[$.

b) Vi löser ekvationen $|x + 3| + x = |x - 2|$ genom att studera tre fall.

Fall 1: $x \leq -3$. Vi får ekvationen: $-x - 3 + x = 2 - x \Leftrightarrow x = 5$, som inte tillhör aktuellt intervall.

Fall 2: $-3 \leq x \leq 2$. Vi får ekvationen: $x + 3 + x = 2 - x \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$, som duger, ty $x = -\frac{1}{3}$ tillhör intervallet.

Fall 3: $x \geq 2$. Vi får ekvationen: $x + 3 + x = x - 2 \Leftrightarrow x = -5$, som inte tillhör aktuellt intervall.

Svar: $x = -\frac{1}{3}$

2. a) Vi sätter in linjens ekvation i planets och får

$$(1 + t) + 3(1 + 0) - 2(0 + t) = 7 \Leftrightarrow t = -3$$

vilket betyder att punkten $(1 - 3, 1, -3) = (-2, 1, -3)$ är skärningspunkten mellan linjen och planet.

Svar: Linjen skär planet i punkten $(-2, 1, -3)$

b) Linjerna skär varandra om systemet $\begin{cases} 1 + t = 4 + 2s \\ 1 = -s \\ t = 2 + s \end{cases}$ har entydig lösning i s och t .

Via de två sista ekvationerna har vi $s = -1$, $t = 1$, som insatt i den första ekvationen ger likhet även där. Alltså skär linjerna varandra då $s = -1$, $t = 1$. Vi sätter in $t = 1$ i L_1 's ekvation och får skärningspunkten $(1 + 1, 1, 1) = (2, 1, 1)$.

Svar: Linjerna har skärning i punkten $(2, 1, 1)$.

3. a) Vi har (trigonometriska ettan)

$$\cos \alpha = \left[\text{ty } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \right] = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{25}{36}} = -\sqrt{\frac{11}{36}} = -\frac{\sqrt{11}}{6}$$

Eftersom $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ har vi

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \frac{5}{6} \cdot \left(-\frac{\sqrt{11}}{6}\right) = -\frac{10\sqrt{11}}{36} = -\frac{5\sqrt{11}}{18}$$

Svar: $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{11}}{6}$, $\sin 2\alpha = -\frac{5\sqrt{11}}{18}$

b) Vi använder additionssatsen för sinus och får

$$A \sin x + B \sin x = C \sin(x + v) = C(\sin x \cos v + \cos x \sin v) = C \cos v \sin x + C \sin v \cos x$$

Vi har då likhet mellan VL och HL

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C \cos v = A \\ C \sin v = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos v = \frac{A}{C} \\ \sin v = \frac{B}{C} \end{cases}$$

Av trigonometriska ettan har vi

$$\cos^2 v + \sin^2 v = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{A}{C}\right)^2 + \left(\frac{B}{C}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow A^2 + B^2 = C^2 \Leftrightarrow C = \pm\sqrt{A^2 + B^2},$$

och kan alltså välja $C = \sqrt{A^2 + B^2}$, och får villkoren $\begin{cases} \cos v = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \\ \sin v = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \end{cases}, \mathbf{v.s.v.}$

c) Låt $A = 1$ och $B = -\sqrt{3}$ i b) ovan. Vi får $C = \sqrt{1+3} = 2$, vilket ger $\begin{cases} \cos v = \frac{1}{2} \\ \sin v = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$, och vi kan välja $v = -\frac{\pi}{3}$.

Alltså

$$\sin 3x - \sqrt{3} \cos 3x = 0 \Leftrightarrow 2 \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow 3x - \frac{\pi}{3} = n\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{9} + n\frac{\pi}{3}$$

Alternativ lösning:

$$\sin 3x - \sqrt{3} \cos 3x = 0 \Leftrightarrow \tan 3x = \sqrt{3} \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{3} + n\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{9} + n\frac{\pi}{3}$$

$$\mathbf{Svar: } x = \frac{\pi}{9} + n\frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$$

4. a) Vi har $|z_2| = \sqrt{4 \cdot 2 + 4 \cdot 2} = 4$. Alltså

$$z_2 = -2\sqrt{2} + i2\sqrt{2} = 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

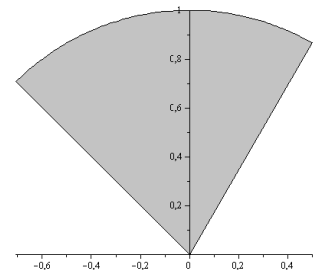
Vi får

$$(z_1 z_2)^{12} = \left(3e^{i\pi/3} \cdot 4e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^{12} = 12^{12} \left(e^{i\frac{13\pi}{12}}\right)^{12} = 12^{12} \underbrace{e^{i13\pi}}_{=-1} = -12^{12}$$

$$\mathbf{Svar: } -12^{12}$$

b) Vi har $\arg z_1 = \pi/3$ och $\arg z_2 = 3\pi/4$.

$|z| \leq 1$ innebär alla z på cirkelskiva med radie 1 och medelpunkt i origo. De båda villkoren $|z| \leq 1$ och $\arg z_1 \leq \arg z \leq \arg z_2$ ger oss då de z som markerats i figuren.



5. a) Ekvationens termer är alla definierade om $x \in]1, \infty[\cap]-2, \infty[=]1, \infty[= D_{\text{ekv}}$

Alltså:

$$2\ln(x-1) + \ln(x+2) = \ln 2, x > 1 \Leftrightarrow$$

$$\ln(x-1)^2 + \ln(x+2) = \ln 2, x > 1 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \ln((x-1)^2(x+2)) &= \ln 2, x > 1 \Leftrightarrow [\text{ty } \ln \text{ är en omvändbar funktion}] \\ (x-1)^2(x+2) &= 2, x > 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 2, x > 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x = 0, x > 1 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$x(x^2 - 3) = 0, x > 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$$

Anm: $x = 0$ eller $x = -\sqrt{3}$ duger inte eftersom dessa värden inte tillhör D_{ekv} .

$$\mathbf{Svar: } x = \sqrt{3}.$$

b) Vi visar påståendet med hjälp av induktion.

- För $p = 1$ har vi $VL(1) = \ln x = HL(1)$
- Antag att $\ln x^k = k \ln x$ för godtyckligt men fixt $k \in \mathbb{Z}^+$. Vi skall då visa att detta medför att $VL(k+1) = HL(k+1)$, d.v.s. vi skall visa att antagandet medför att $\ln x^{k+1} = (k+1) \ln x$.
Antagandet medför detta, ty
 $\ln x^{k+1} = \ln(x^k \cdot x) = \ln x^k + \ln x = [\text{enligt antagandet}] = k \ln x + \ln x = (k+1) \ln x$.
- Enligt induktionsprincipen gäller det då att $\ln x^p = p \ln x$ för alla $p \in \mathbb{Z}^+$, **v.s.v.**

Anm: Regeln $\ln x^\alpha = \alpha \ln x$ gäller för alla $\alpha \in \mathbb{R}$, men här har vi bara visat den för $\alpha = p, p \in \mathbb{Z}^+$.

6. a) Eftersom planet innehåller båda linjerna låter vi $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ vara en vektor som är ortogonal mot de båda givna linjernas riktningsvektorer $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ respektive $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Då skall det gälla att

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} A = -t \\ B = -t \\ C = t \end{cases}$$

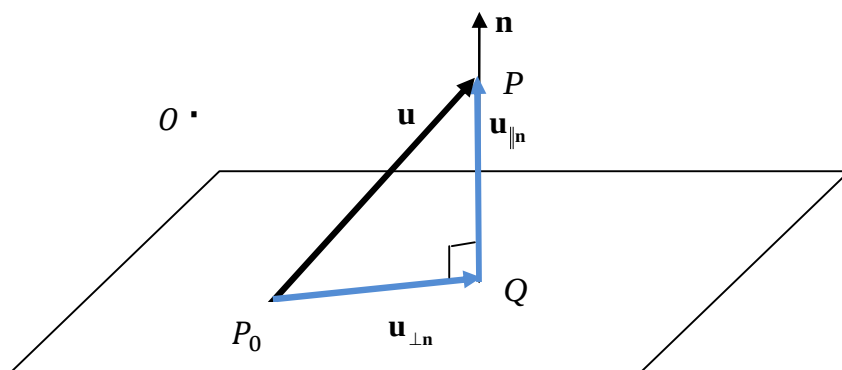
Vi har alltså $\mathbf{n} = t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och kan (t.ex.) välja vektorn $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ som normal till planet. Eftersom punkten $(1,1,0)$ ligger på linjen L_1 så ligger den också i planet, som alltså har ekvationen
 $(x-1) + (y-1) - z = 0 \Leftrightarrow x + y - z = 2$.

Anm: Punkten $(4,0,2)$ ligger på L_2 och skärningspunkten $(2,1,1)$ (se uppgift 2b) ligger på båda linjerna. En kontroll visar att båda dessa punkters koordinater satisfierar ekvationen $x + y - z = 2$.

Vi har $P = (3,1,1) \notin \text{planet}$. Vi låter $P_0 = (1,1,0)$, som ligger i planet, och bildar vektorn

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{P_0P} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi skall bestämma punkten Q :s koordinater och söker därför $\overrightarrow{OQ}$.



Av figuren och projektionsformeln har vi

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP_0} + \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\parallel \mathbf{n}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Alltså har vi punkten $Q = \left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$

Svar: P :s ortogonala projektion i det aktuella planet är $Q = \left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$

7. Vi har

$$s_n = \sum_{k=1}^n e^{ik\frac{\pi}{2}} = \sum_{k=1}^n \left(e^{i\frac{\pi}{2}} \right)^k = \sum_{k=1}^n i^k = \text{/geometrisk summa/} = \frac{i(1-i^n)}{1-i}.$$

För $n = 4p - 3, p \in \mathbb{Z}^+$ har vi $i^n = i \Rightarrow |s_n| = \left| \frac{i(1-i)}{1-i} \right| = |i| = 1 \leq \sqrt{2}$.

För $n = 4p - 2, p \in \mathbb{Z}^+$ har vi $i^n = -1 \Rightarrow |s_n| = \left| \frac{i(1+1)}{1-i} \right| = \left| \frac{2i}{1-i} \right| = \left| \frac{2i(1+i)}{2} \right| = |-1 + i| = \sqrt{2} \leq \sqrt{2}$.

För $n = 4p - 1, p \in \mathbb{Z}^+$ har vi $i^n = -i \Rightarrow |s_n| = \left| \frac{i(1+i)}{1-i} \right| = \left| \frac{i(1+i)(1+i)}{2} \right| = \left| \frac{i(1+2i-1)}{2} \right| = |-1| = 1 \leq \sqrt{2}$.

För $n = 4p, p \in \mathbb{Z}^+$ har vi $i^n = 1 \Rightarrow |s_n| = 0 \leq \sqrt{2}$.

De enda värdena som $|s_n|$ kan anta är alltså de som beräknats ovan, vilket medför att $|s_n| \leq \sqrt{2}$ för alla $n \in \mathbb{Z}^+$, **v.s.v.**

Anm: De aktuella komplexa talen ovan finner man "lätt" genom att markera dem i ett komplex talplan. Vi får, i tur och ordning, talen $s_1 = i, s_2 = i - 1, s_3 = i - 1 - i = -1$ resp. $s_4 = i - 1 - i + 1 = 0$. Sedan upprepas dessa tal regelbundet då $n = 5, 6, 7, 8$ resp. $n = 9, 10, 11, 12$ o.s.v.