

TNA001- Matematisk grundkurs

Tentamen 2018-01-04 – Lösningsskiss

1.a) Prövning ger att $x = 1$ är en lösning till ekvationen. Faktorsatsen ger då att $x - 1$ är en faktor till polynomet i vänstra ledet i ekvationen.

Polynomdivision ger

$$\frac{x^3 + x^2 - 10x + 8}{x - 1} = x^2 + 2x - 8$$

vilket ger ekvationen $(x - 1)(x^2 + 2x - 8) = 0$.

Nollprodukt ger då $x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = -4, x = 2$.

Svar: $x = -4, x = 1, x = 2$

b) Faktorisering ger $x^3 + x^2 - 10x + 8 > 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 2)(x + 4) > 0$ och teckenschema ger då

		-4		1		2	
$x - 1$	-	-	-	0	+	+	+
$x - 2$	-	-	-	-	-	0	+
$x + 4$	-	0	+	+	+	+	+
$(x - 1)(x - 2)(x + 4)$	-	0	+	0	-	0	+

vilket ger lösningsmängden $x \in]-4, 1[\cup]2, \infty[$.

Svar: $x \in]-4, 1[\cup]2, \infty[$

2.a) Definition av $\ln$ ger $2 - x > 0 \Leftrightarrow x < 2$ och $x > 0$ vilket ger $x \in]0, 2[$.

Vi får då

$$\ln(2 - x) + \ln 4 = \ln x, x \in]0, 2[\Leftrightarrow \ln(8 - 4x) = \ln x, x \in]0, 2[$$

$$\Leftrightarrow // \ln \text{ omvändbar} // \Leftrightarrow 8 - 4x = x, x \in]0, 2[$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{8}{5}.$$

Svar: $x = \frac{8}{5}$

b) Med sambandet $\cos v = \sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$ fås

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\right) \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4} - 2x\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{4} - 2x + n \cdot 2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{3} = \pi - \left(\frac{3\pi}{4} - 2x\right) + n \cdot 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow // \text{ Ekv. 2 saknar lösning } // \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{48} + n \cdot \frac{2\pi}{5}.$$

Svar: $x = \frac{5\pi}{48} + n \cdot \frac{2\pi}{5}, n \in \mathbb{Z}$

3.a) Vi får med $|x + 1| + |x - 1| = x + 4$

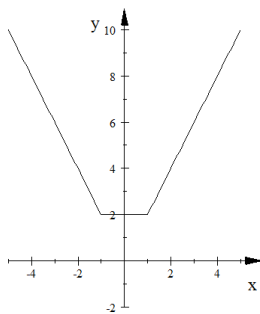
$I_1: x \leq -1$	$I_2: -1 \leq x \leq 1$	$I_3: x \geq 1$
$-x - 1 - x + 1 = x + 4$ $\Leftrightarrow 3x = -4$ $\Leftrightarrow x = -\frac{4}{3} \in I_1$	$x + 1 - x + 1 = x + 4$ $\Leftrightarrow x = -2 \notin I_2$	$x + 1 + x - 1 = x + 4$ $\Leftrightarrow x = 4 \in I_3$

vilket ger lösningarna $x = -\frac{4}{3}, x = 4$.

Svar: $x = -\frac{4}{3}, x = 4$

b) Vi får $f(x) = |x + 1| + |x - 1| = \begin{cases} x + 1 + x - 1 = 2x & , x \geq 1 \\ x + 1 - x + 1 = 2 & , -1 \leq x \leq 1 \\ -x - 1 - x + 1 = -2x & , x \leq -1 \end{cases}$

Graf:



c) Då $f(-2) = |-2 + 1| + |-2 - 1| = 4$ och $f(2) = |2 + 1| + |2 - 1| = 4$ leder till att $f(-2) = f(2)$ så saknas alltså invers då två olika värden på x ej får ge samma $f(x)$ om funktionen ska ha invers.

4.a) En riktningsvektor $\mathbf{v}$ för linjen ges av $\mathbf{v} = \overline{P_1 P_2} = \overline{OP_2} - \overline{OP_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och en punkt på

Linjen är $P_1 = (1, -2, 2)$ vilket ger linjens ekvation $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$.

Svar: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$

b) Två ickeparallella vektorer i planet ges av $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och linjens riktningsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och med punkten

$P_1 = (1, -2, 2)$ fås då planets ekvation på parameterform $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R}$.

För att få planets normal söker vi en vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ sådan att

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vi sätter $s = 1$ och får normalvektorn $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ som insatt i planets ekvation på normalform, $Ax + By + Cz = D$, ger $x - 2y + z = D$.

Med punkten $P_1 = (1, -2, 2)$ insatt i ekvationen får $D = 7$ och planets ekvation blir då $x - 2y + z = 7$.

Svar: Planets ekvation på parameterform ges av $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $s, t \in \mathbb{R}$ och på normalform av $x - 2y + z = 7$.

c) Vi tar punkten $P_1 = (1, -2, 2)$ på linjen och bildar vektorn $\overline{P_1 P} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vektoraddition ger med linjens riktningsvektor $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (rita figur)

$$\mathbf{u}_{\perp \mathbf{v}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\parallel \mathbf{v}} = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{5+3+1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

vilket ger det kortaste avståndet $|\mathbf{u}_{\perp \mathbf{v}}| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Svar: Det kortaste avståndet mellan punkten och linjen är $2\sqrt{2}$ i.e.

5.a) Vi får

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+i}{i}\right)^{10} &= \left(\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{i\frac{\pi}{2}}}\right)^{10} = \left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{10} = (\sqrt{2})^{10} e^{-i\frac{10\pi}{4}} = 2^5 e^{-i\frac{5\pi}{2}} = 2^5 \left(\cos\left(-\frac{5\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{2}\right)\right) \\ &= 2^5 \left(\cos\frac{3\pi}{2} + i \sin\frac{3\pi}{2}\right) = 2^5(0 + i \cdot (-1)) = -2^5 i = -32i. \end{aligned}$$

Svar: $\left(\frac{1+i}{i}\right)^{10} = -32i$

b) Vi får med $z = x + iy$ och definition av absolutbelopp

$$\begin{aligned} \begin{cases} |z - 2i| = 3 \\ z + \bar{z} = 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} |x + iy - 2i| = 3 \\ x + iy + x - iy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x + i(y - 2)| = 3 \\ 2x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + (y - 2)^2} = 3 \\ x = 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (y - 2)^2 = 9 \\ x = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

vilket ger

$$2^2 + (y - 2)^2 = 9 \Leftrightarrow (y - 2)^2 = 5 \Leftrightarrow y = 2 \pm \sqrt{5}$$

d.v.s. $z = 2 + (2 - \sqrt{5})i$ eller $z = 2 + (2 + \sqrt{5})i$.

Svar: $z = 2 + (2 - \sqrt{5})i$, $z = 2 + (2 + \sqrt{5})i$

6.a) Vi får om $a_n = a_1 k^{n-1}$

$$\begin{cases} a_2 = \frac{4}{3} \\ a_3 + a_4 = \frac{16}{27} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 k^{2-1} = \frac{4}{3} \\ a_1 k^{3-1} + a_1 k^{4-1} = \frac{16}{27} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 k = \frac{4}{3} \\ a_1 k^2 + a_1 k^3 = \frac{16}{27} \end{cases}$$

Dividerar vi den andra ekvationen med den första får

$$\frac{a_1 k^2 + a_1 k^3}{a_1 k} = \frac{\frac{16}{27}}{\frac{4}{3}} \Leftrightarrow k + k^2 = \frac{4}{9} \Leftrightarrow k^2 + k - \frac{4}{9} = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow k = -\frac{4}{3}, k = \frac{1}{3}$$

vilket om $k = -\frac{4}{3}$ ger $a_1 = -1$ och summan $s_n = \frac{a_1(k^n - 1)}{k - 1}$ ger då $s_n = \frac{-1\left(\left(-\frac{4}{3}\right)^n - 1\right)}{-\frac{4}{3} - 1} = \frac{3}{7}\left(\left(-\frac{4}{3}\right)^n - 1\right)$

och med $k = \frac{1}{3}$ får $a_1 = 4$ och summan $s_n = \frac{4\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1\right)}{\frac{1}{3} - 1} = -6\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1\right) = 6\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$.

Svar: Om $k = -\frac{4}{3}$ och $a_1 = -1$ får summan $s_n = \frac{3}{7}\left(\left(-\frac{4}{3}\right)^n - 1\right)$ och om $k = \frac{1}{3}$ och $a_1 = 4$ får summan $s_n = 6\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$.

b) Definitionsmängd och värdemängd för arcusfunktionerna ger att $x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$.

Vi får

$$\arctan x = \arccos 3x, x \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \Leftrightarrow \tan(\arctan x) = \tan(\arccos 3x), x \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \Leftrightarrow x = \frac{\sin(\arccos 3x)}{\cos(\arccos 3x)}, x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$$

$$\Leftrightarrow // \text{Trigettan} // \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos 3x)}}{3x}, x \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{1 - 9x^2}}{3x}, x \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \Leftrightarrow 3x^2 = \sqrt{1 - 9x^2}, x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$$

$$\Leftrightarrow 9x^4 = 1 - 9x^2, x \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \Leftrightarrow 9x^4 + 9x^2 - 1 = 0, x \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \Leftrightarrow x^4 + x^2 - \frac{1}{9} = 0, x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$$

$$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1}{6}(\sqrt{13} - 3)}$$

$$\textbf{Svar: } x = \sqrt{\frac{1}{6}(\sqrt{13} - 3)}$$

7. Induktionsbevis ger

Steg 1. För $n = 1$ får

$$VL(1) = \sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 = 1 \text{ och } HL(1) = \left(\sum_{k=1}^1 k\right)^2 = 1^2 = 1.$$

d.v.s. $VL(1) = HL(1)$.

Steg 2. Antag att påståendet är sant för något $p \in \mathbb{Z}^+$, dvs $\sum_{k=1}^p k^3 = \left(\sum_{k=1}^p k\right)^2$.

Detta medför

$$VL(p+1) = \sum_{k=1}^{p+1} k^3 = \sum_{k=1}^p k^3 + (p+1)^3$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{\text{enl. antagandet}}{=} \left(\sum_{k=1}^p k \right)^2 + (p+1)^3 = (1+2+3+4+\dots+p)^2 + (p+1)^3 \\
&\quad // \text{Aritmetisk summa} // \\
&= \left(\frac{p(1+p)}{2} \right)^2 + (p+1)^3 = \frac{p^2(1+p)^2}{2} + (p+1)^3 \\
&\quad = \frac{p^2(p^2+2p+1)}{4} + p^3 + 3p^2 + 3p + 1 \\
&= \frac{p^4 + 2p^3 + p^2 + 4p^3 + 12p^2 + 12p + 4}{4} = \frac{p^4 + 6p^3 + 13p^2 + 12p + 4}{4}
\end{aligned}$$

och vi har

$$\begin{aligned}
HL(p+1) &= \left(\sum_{k=1}^{p+1} k \right)^2 \\
&= (1+2+3+4+\dots+p+(p+1))^2 = \left(\frac{(p+1)(1+(p+1))}{2} \right)^2 \\
&= \frac{(p+1)^2(1+(p+1))^2}{4} = \frac{(p^2+2p+1)(p^2+4p+4)}{4} \\
&= \frac{p^4 + 4p^3 + 4p^2 + 2p^3 + 8p^2 + 8p + p^2 + 4p + 4}{4} \\
&= \frac{p^4 + 6p^3 + 13p^2 + 12p + 4}{4}
\end{aligned}$$

dvs $VL(p+1) = HL(p+1)$.

Därmed har vi visat att om sambandet gäller för $n = p$ så gäller det för $n = p + 1$.

Steg 3. Sambandet gäller enligt Steg 1 för $n = 1$. Enligt Steg 2 gäller det då även för $n = 1 + 1 = 2$. Då gäller det även för $n = 2 + 1 = 3$ och $n = 3 + 1 = 4$ o.s.v. Alltså gäller sambandet för alla $n \in \mathbb{Z}^+$, VSV.