Svar till TNA006 120924

1. Stationära punkter fås genom att lösa

$$\begin{cases} 2x + y^2 & = & 0 \\ 2y + 2xy & = & 0 \end{cases}$$

Lösningarna är $(0,0)$ och $(-1, \pm\sqrt{2})$. Alltså tre stationära punkter.

För att bestämma karaktären behöver vi den associerade kvadratiska formen.

$$f''_{xx} = 2, \quad f''_{xy} = 2y, \quad f''_{yy} = 2 + 2x.$$

För den den stationära punkten $(0,0)$ får vi då

$$Q(h,k) = 2h^2 + 2k^2$$

som är en positivt definit kvadratisk form, en minpunkt.

För den den stationära punkten $(-1, \sqrt{2})$ får vi då

$$Q(h,k) = 2h^2 + 4\sqrt{2}hk$$

som är en indefinit kvadratisk form (kvadratkomplettera!), en sadelpunkt.

För den den stationära punkten $(-1, -\sqrt{2})$ får vi då

$$Q(h,k) = 2h^2 - 4\sqrt{2}hk$$

som är en indefinit kvadratisk form (kvadratkomplettera!), en sadelpunkt.

Svar: Tre stationära punkter: $(0,0)$ en lokal minimipunkt, $(-1, \pm\sqrt{2})$ sadelpunkter.

2. Kedjeregeln ger att

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = z'_u + 3z'_v$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = -2z'_v$$

Vilket ger oss differentialekvationen

$$2z'_x + 3z'_y = 2\left(z'_u + 3z'_v\right) + 3\left(-2z'_v\right) = 2z'_u = 0$$

Lösningar är $z = g(v)$. Vi får

Svar: Lösningen är $z = g(3x - 2y)$ där g är en godtycklig funktion.

3. Vi skall visa att $\rho(h,k) \to 0$ då $(h,k) \to (0,0)$:

$$f(1,2) = 3, \quad f'_x = y + 2x, \; f'_x(1,2) = 4, \quad f'_y = x, \; f'_y(1,2) = 1.$$

$$\rho(h,k) = \frac{f(1+h, 2+k) - f(1,2) - hf'_x(1,2) - kf'_y(1,2)}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\frac{(1+h)(2+k) + (1+h)^2 - 3 - 4h - k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{hk + h^2}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

För att undersöka gränsvärdet ser vi på polära koordinater $(h,k) = (r\cos\theta, \; r\sin\theta)$:

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^2(\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta)}{r} = \lim_{r\to 0} r \left(\underbrace{\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta}_{\text{begränsad funktion}} \right) = 0$$

4. $F'_y = -x^2 z \sin(xyz)$ så $F'_y(1,1,\pi/2) = -\pi/2 \neq 0$ alltså går det att definiera y som en funktion av x och z. Vi får att $y(1,\pi/2) = 1$. För att bestämma derivatorna deriverar vi implicit, först på x

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(x\cos(xyz) = 0 \Big)$$

$$\cos(xyz) - x(yz + xzy'_x)\sin(xyz) = 0$$

Med $x = 1$, $y(1,\pi/2) = 1$ och $z = \pi/2$:

$$-(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} y'_x(1,\pi/2)) = 0$$

Vi får att $y'_x(1,\pi/2) = -1$.

Sedan för z-derivatan:

$$\frac{\partial}{\partial z}\Big(x\cos(xyz) = 0 \Big)$$

$$-x(xy + xzy'_z)\sin(xyz) = 0$$

Med $x = 1$, $y(1,\pi/2) = 1$ och $z = \pi/2$:

$$-(1 + \frac{\pi}{2} y'_z(1,\pi/2)) = 0$$

Vi får att $y'_z(1,\pi/2) = -2/\pi$.

Svar:

$$y(1,\pi/2) = 1, \quad y'_x(1,\pi/2) = -1, \quad y'_z(1,\pi/2) = -2/\pi$$