(5p) Uppgift 1

Företaget XAJA tillverkar två olika sorters rengöringsprodukter för fönsterputsning, benämnda F1 och F2. Förutom vatten, som ingår i båda produkterna är, innehållet ett antal olika kemikalier. Dessa kemikalier är hemliga och benämns endast med K1, K2, K3 och K4. För att producera 1 liter fönsterputs av typen F1 går det åt 2 deciliter K1, 3 deciliter K3 och 3 deciliter K4. För att producera 1 liter av F2 går det åt 1 deciliter K1, 2 deciliter K2 och 3 deciliter K4. Resterande innehåll i båda produkterna är sedan vatten, men då kostnaden är så pass låg för inköp av vatten och då företaget förväntar sig att tillgången till vatten är obegränsad kan vi här bortse från denna resurs.

Vinsten (exklusive kostnaden för inköp av kemikalier) vid försäljning av 1 liter fönsterputs är 2 kr för F1 och 3 kr för F3.

Kemikalier kan köpas från två olika leverantörer (L1 och L2), och för den kommande produktionsperioden (1 månad) kan de två leverantörerna maximalt leverera mängder enligt nedanstående tabell, där även priser återfinns.

	Max leverans i liter		**Pris i kronor per liter**	
	L1	**L2**	**L1**	**L2**
K1	100 000	50 000	1,2	1,4
K2	100 000	40 000	1,3	1,1
K3	50 000	100 000	2,1	2,3
K4	10 000	140 000	2,2	2,3

Produktionen den kommande månaden har en begränsning på totalt 500 000 liter fönsterputs.

Din uppgift är att formulera företagets vinstmaximeringsproblem som ett LP (dvs. ett linjärt problem med kontinuerliga variabler), för att bestämma optimal produktion och inköp den kommande månaden.

Det finns inget krav att använda summering och indexering för att lösa uppgiften. Däremot måste ingående variabler och ev. parametrar definieras.

(5p)

Parametrar:

a_{ij}=mängd kemikalie *k* som krävs för att producera en liter fönsterputs *i*, *i=1,2*, *j=1,2,3,4*

b_{jk}=tillgänglig kvantitet av kemikalie *j* från leverantör *k*, i liter, *j=1,2,3,4*, *k=1,2*

c_{jk}=kostnad för inköp av en liter kemialie av typ *j f*rån leverantör *k*, *j=1,2,2,3*, *k=1,2*

d_i=vinst i kronor per liter fönsterputs *i*, *i=1,2*

m=produktionsmax

Variabler:

x_i= produktion av fönsterputs *i*¸i liter, den kommande månaden, *i=1,2*

y_{jk}=inköp a kemikalie *j* , i liter, från leverantör *k*, *j=1,2,3,4* , *k=1,2*

Modell:

$$\max z = \sum_{i=1}^{2} d_i x_i - \sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{2} c_{jk} y_{jk}$$

$$då \sum_{i=1}^{2} a_{ij} x_i \leq \sum_{k=1}^{2} y_{jk}\,, j = 1,2,3,4\ (förbrukning \leq inköp)$$

$$y_{jk} \leq b_{jk}, j = 1,2,3,4, k = 1,2\ (inköp \leq tillgång\ hos\ lev.)$$

$$\sum_{i=1}^{2} x_i \leq m, (\max prod.)$$

$$x_i \geq 0, i = 1,2$$

$$y_{jk} \geq 0, j = 1,2,3,4, j = 1,2$$

(5p) Uppgift 2

Ett företag tillverkar fyra olika plastprodukter med återvunnen plast som huvudråvara. För varje produkt går det åt 10, 20, 24 respektive 16 kg återvunnen plast för att tillverka en enhet. Totala tillgången av återvunnen plast under planeringsperioden är 2500 kg. Tillgänglig total processtid är 300 timmar och processtiden för produkterna är 1 h/enhet. Till en extra kostnad av 5 kr/kg kan nytillverkad plast köpas in och användas i produktionen, dock maximalt 500 kg. Vinsten på produkterna är 65, 56, 60 respektive 75 kronor/enhet (efter avdrag för normala råvarukostnader, normala processtids-kostnader mm). Företaget räknar med att kunna sälja allt som produceras. Pga. ett långsiktigt kontrakt måste minst 30 enheter av produkt 3 tillverkas under planeringsperioden.

Företagets problem att maximera vinsten kan formuleras enligt nedan.

Variabeldeklaration:
x_1 = antal produkt 1 som tillverkas
x_2 = antal produkt 2 som tillverkas
x_3 = antal produkt 3 som tillverkas
x_4 = antal produkt 4 som tillverkas
y = mängd inköpt ny plast i kg

$$\max z = 65x_1 + 56x_2 + 60x_3 + 75x_4 - 5y$$

då

$$10x_1 + 20x_2 + 24x_3 + 16x_4 - y \leq 2500 \quad \text{(tillgång råvara)}$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 300 \quad \text{(tillgång tid)}$$
$$y \leq 500 \quad \text{(max inköp av ny plast)}$$
$$x_3 \geq 30 \quad \text{(produktionskrav)}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, y \geq 0 \quad \text{(icke-negativitet)}$$

Modellen har lösts med AMPL/CPLEX och utdata finns på nästa sida. Utgå från utdata på nästa sida och besvara frågorna.

För var och en av deluppgifterna nedan, ange om förändringen kommer göra att målfunktionsvärdet minskar, är oförändrat eller ökar, samt bestäm storleken på förändringen i de fall målfunktionsvärdet kommer att minska eller öka. Om det inte är möjligt att bestämma exakt storlek på förändringen skall minsta möjliga intervall för förändringen istället anges. *Samtliga svar måste motiveras med hjälp av den utdata som finns på nästa sida.*

```
CPLEX 11.0.1: sensitivity
CPLEX 11.0.1: optimal solution; objective 14120
3 dual simplex iterations (2 in phase I)
z = 14120
: _varname  _var     _var.rc      :=
1   x1          228     0
2   x2              0   -74
3   x3            30     0
4   x4              0   -29
5   y             500    0
;
 _varname  _var.down _var.current _var.up    :=
1   x1                    50           65       1e+20
2   x2                -1e+20        56        130
3   x3                -1e+20        60        156
4   x4                -1e+20        75        104
5   y                    -6.5          -5       1e+20
;
:     _conname     _con.slack _con.dual    :=
1   tillgang_ravara             0         6.5
2   tillgang_tid                 42         0
3   inkop_ny_plast              0         1.5
4   prod_krav                      0       -96
;
:     _conname     _con.down _con.current _con.up    :=
1   tillgang_ravara          220        2500       2920
2   tillgang_tid                258         300      1e+20
3   inkop_ny_plast                0         500        920
4   prod_krav                        0          30        125
;
```

a) Vinsten för produkt 1 minskar till 55kr/enhet (1p)
Minskning från 65 till 55. Lösningen oförändrad eftersom 55 ligger inom var.dow, var.up för målfunktionskoefficienten framför x1. Nu produceras 228 st av produkt 1, vinsten kommer alltså minska med 10*228=2280kr.

b) Vinsten för produkt 4 ökar till 100kr/enhet (1p)
Ökning från 75 till 100. Lösningen oförändrad eftersom 100 ligger inom var.dow, var.up för målfunktionskoefficienten framför x4. Nu produceras 0 st av produkt 1, vinsten kommer alltså att vara oförändrad.

c) Kontraktet som kräver att minst 30 enheter av produkt 3 tillverkas, omförhandlas till minst 20 enheter istället (1p)
Oförändrad duallösning eftersom 20 ligger inom intervallet con.down, con.up för bvk. prod. krav. Relaxation och maxproblem => oförändrat eller högre målfunktionsvärde. Dualvärde: -96. Dvs. målfunktionsvärdet kommer öka med 10*96=960kr

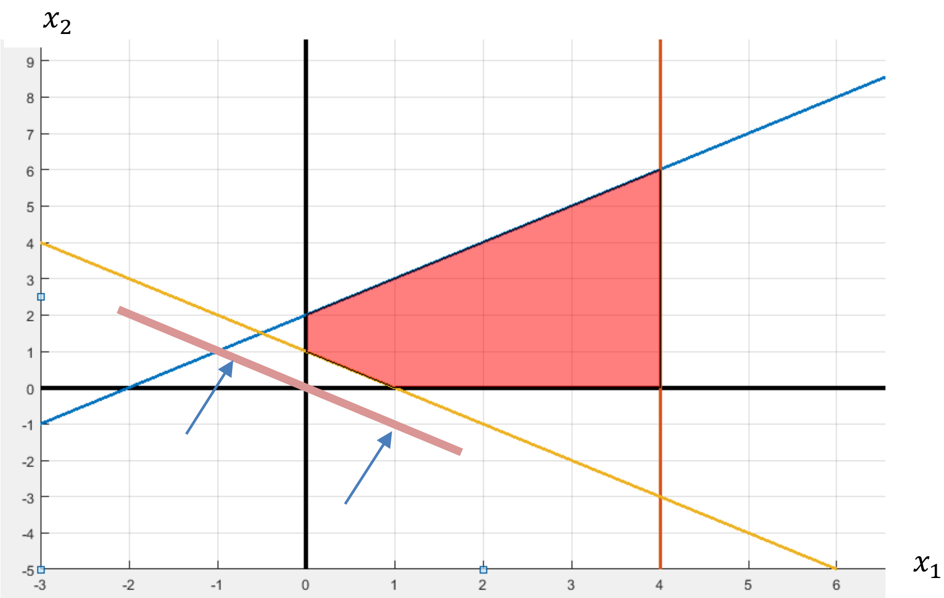
d) Ytterligare 600kg ny plast kan köpas in (2p)
Ny begränsning 1100 kg ny plast. Ligger utanför intervallet för oförändrad duallösning. Relaxation+maxproblem ger oförändrat eller högre målfunktionsvärde. 500->920 ger 420*1.5 i säker ökning av målfunktionsvärdet. 1.5 övre gräns för dualvärde vid ökning över 920kg, dvs. max ökning =600*1.5. Målfunktionen kommer öka mellan 630 och 900 kr.

(5p) Uppgift 3

Betrakta följande maximeringsproblem:

$\max z = x_1 + x_2$
då $-x_1 + x_2 \leq 2$ (bvk1)
$x_1 \leq 4$ (bvk2)
$x_1 + x_2 \geq 1$ (bvk3)
$x_1, x_2 \geq 0$

Det tillåtna området (gråmarkerat) är illustrerat i figuren nedan.



a) Illustrera målfunktionen i figuren ovan och lös problemet grafiskt. Ange optimallösning och optimalt målfunktionsvärde. (1p)
Markera gärna i figuren, men riv i så fall loss denna sida från tentatesen och lämna in tillsammans med övriga lösningsblad. Var noga med att skriva sidnummer och AID-nummer överst på sidan.
Opt $x^* = (4,6)^T, z^* = 10$

b) Motivera utifrån figuren ovan vilken/vilka av följande punkter
$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $x^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $x^{(3)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x^{(4)} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

som utgör
1) en tillåten lösning? 1, 2
2) en tillåten baslösning? 2
(1p)

Fortsättning på nästa sida.

c) För att lösa problemet med simplexmetoden krävs även att man läger till slackvariabler (med beteckning x_3, x_4, x_5) och formulerar problemet med endast likhetsvillkor:

$\max z = x_1 + x_2$
$-x_1 + x_2 + x_3 = 2$ (bvk1)
$x_1 + x_4 = 4$ (bvk2)
$x_1 + x_2 - x_5 = 1$ (bvk3)
$x_1, x_2 \geq 0$

I en iteration av simplexmetoden är den aktuella lösning $x = (1,0,3,3,0)^T$ och efter val av inkommande och utgående basvariabel erhålls sökriktningen $s = (1,0,1,-1,1)^T$ och steglängden $t = 3$.

1) Vad motsvarar detta för val av inkommande och utgående basvariabel?
2) Vad blir den nya lösningen och hur har målfunktionsvärdet förändrats mellan de två lösningarna?
3) Vad var den reducerade kostnaden för inkommande basvariabel? (3p)

Inkommande: x_5 utgående x_4 ny lösning $x = (4,0,6,0,3)^T$

Målfunktionsvärde med ursprungslösning: 1

Målfunktionsvärde med ny lösning: 4

Reducerad kostnad: 1

(5p) Uppgift 4

Betrakta följande linjära optimeringsproblem

$\max z = 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 3x_4$

då $x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 20$

$x_4 \geq 5$

$3x_1 + x_3 + x_4 = 10$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

Problemet har lösts med simplex och den slutliga tablån återfinns nedan, där x_5 och $x_6$är slackvariabler för respektive bivillkor.

	z	x1	x2	x3	x4	x5	x6	b
z	1	3	0	0	0	2	6	20
x4	0	0	0	0	1	0	-1	5
x2	0	-5	1	0	0	1	-1	5
x3	0	3	0	1	0	0	1	5

a) Ange optimallösningen och optimalt målfunktionsvärde. (1p)

$$x^* = (0,5,5,5,0,0)^T, z^* = 20$$

b) Hur kan målfunktionskoefficienten framför x_1 förändras utan att optimallösningen förändras? (1p)

$c_1^{ny} = c_1 + \Delta c_1 = 2 + \Delta c_1$

Insättning av Δc_1 i tablån tillsammans med villkor för bibehållen optimalitet ger

$3 - \Delta c_1 \geq 0$, dvs. $\Delta c_3 \leq 3 => c_3^{ny} \leq 5$

c) Hur kan målfunktionskoefficienten framför x_2 förändras utan att optimallösningen förändras. (2p)

$c_2^{ny} = c_2 + \Delta c_2 = 2 + \Delta c_2$

Insättning av Δc_2 i tablån tillsammans med villkor för bibehållen optimalitet ger efter en radoperation

$3 - 5\Delta c_2 \geq 0 => \Delta c_2 \leq 3/5$

$2 + \Delta c_2 \geq 0 => \Delta c_2 \geq -2$

$6 - \Delta c_2 \geq 0 => \Delta c_2 \leq 6$

De två första villkoren är de mest restriktiva och därför erhålls

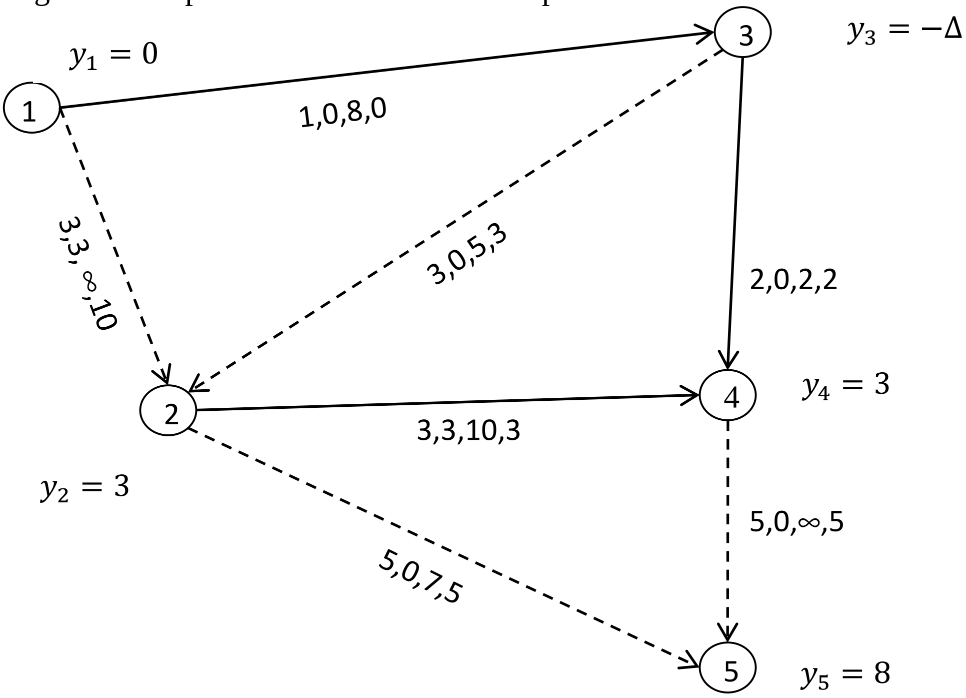
$-2 \leq \Delta c_2 \leq 3/5$ eller $0 \leq c_2^{ny} \leq 2.6$

d) Formulera dualen till optimeringsproblemet. (1p)

$\min w = 20y_1 + 5y_2 + 10y_3$
då $y_1 + 3y_3 \geq 2$
$y_1 \geq 2$
$2y_1 + y_3 \geq 5$
$y_1 + y_2 + y_3 \geq -3$
$y_1 \geq 0, y_2 \leq 0, y_3 fri$

(5p) Uppgift 5

Betrakta nedanstående minkostnadsflödesnätverk. Nod 1 och 3 är källor med styrka 10 respektive 5, och nod 2 och nod 5 är sänkor med styrka 5 respektive 10. Varje båge är märkt med kostnad, undre gräns, övre gräns, samt aktuellt flöde. Basträdet är utmärkt med streckade bågar och nodpriserna är markerade vi respektive nod.



a) Visa att den aktuella lösningen är optimal (1p)
Sätt upp optimalitetsvillkor för icke-basbågar
$\bar{c}_{13} = 1 + 0 - 0 = 1, x_{13} = l_{13}$ ok
$\bar{c}_{24} = 3 + 3 - 3 = 3, x_{24} = l_{24}$ ok
$\bar{c}_{34} = 2 + 0 - 3 = -1, x_{34} = u_{34}$ ok

b) Hur skulle målfunktionsvärdet förändras om den övre gränsen på båge (3,4) ökade med en enhet? (2p)
$\bar{c}_{34} = 2 + 0 - 3 = -1$ och flödesförändringen möjlig i basträdet.
Målfunktionsvärdet skulle minska med 1.

c) Hur kan kostnaden på båge (3,2) förändras utan att optimallösningen förändras? (2p)
Ny kostnad på båge (3,2): $3 + \Delta$ => Nya nodpriser markerade i figuren ovan. Endast nod 3 påverkas.
Sätt upp villkor för bibehållen optimalitet:
$\bar{c}_{13} = 1 + 0 - (-\Delta) = 1 + \Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta \geq -1$
$\bar{c}_{24} = 3 + 3 - 3 = 3 \geq 0$ ingen påverkan
$\bar{c}_{34} = 2 + (-\Delta) - 3 = -1 - \Delta \leq 0 \Rightarrow \Delta \geq -1$
Dvs. kostnaden får minska med max 1 nedåt och oändligt uppåt utan att optamallösningen ändras