TNA001- Matematisk grundkurs
Tentamen 2013-10-25 - Lösningsskiss

1. a)

$$x-3 \leq \frac{4}{x} \Leftrightarrow x-3-\frac{4}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-3x-4}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-4)(x+1)}{x} \leq 0$$

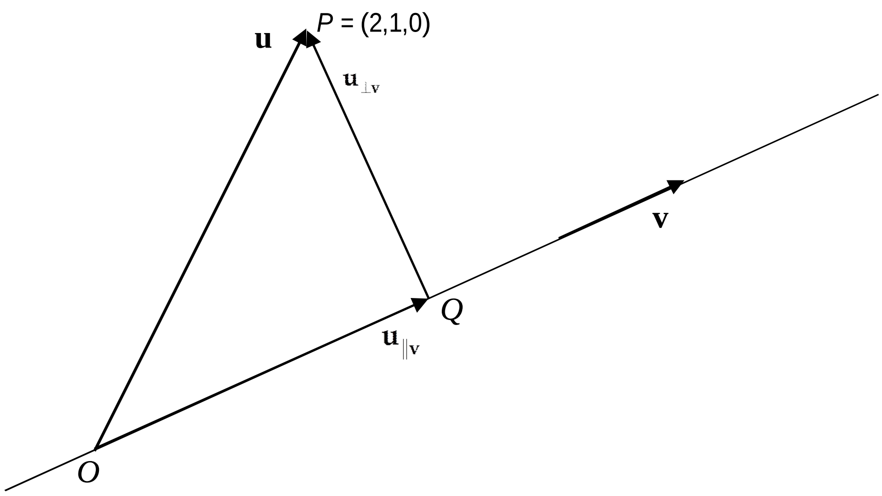
Sedvanligt teckenschema visar att detta är uppfyllt $\Leftrightarrow x \in]-\infty,-1] \cup]0,4]$.

Svar: $x \in]-\infty,-1] \cup]0,4]$.

b) Vi löser ekvationen $|2x-1|+4x=|x+2|$ genom att studera tre fall.
Fall 1: $x \leq -2$. Vi får ekvationen: $1-2x+4x=-x-2 \Leftrightarrow x=-1$, som inte tillhör aktuellt intervall.
Fall 2: $-2 \leq x \leq \frac{1}{2}$. Vi får ekvationen: $1-2x+4x=x+2 \Leftrightarrow x=1$, som inte tillhör aktuellt intervall. Fall 3: $x \geq \frac{1}{2}$. Vi får ekvationen: $2x-1+4x=x+2 \Leftrightarrow x=\frac{3}{5}$, som duger, ty $x=\frac{3}{5}$ tillhör intervallet.

Svar: $x=\frac{3}{5}$

2. b) Vi konstaterar att origo, O, ligger på den givna linjen, och ritar en figur (skiss) där vi har $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ och linjens riktningsvektor $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.



Vi söker koordinaterna för punkten Q och bestämmer därför dess ortsvektor $\overrightarrow{OQ}$.
Vi har av projektionsformeln att

$$\overrightarrow{OQ}=\mathbf{u}_{\parallel\mathbf{v}}=\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}=\cdots=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

d.v.s. punkten $Q=\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.
Svar: $\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

b) Det sökta avståndet ges av $\left|\mathbf{u}_{\perp\mathbf{v}}\right|=\left|\mathbf{u}-\mathbf{u}_{\parallel\mathbf{v}}\right|=$

$$=\left|\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right|=\cdots=\frac{\sqrt{42}}{3}$$

Svar: $\frac{\sqrt{42}}{3}$ l.e.

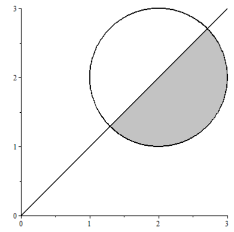
3. a) Vi har $|z_2| = \sqrt{1+3} = 2$. Alltså

$$z_2 = 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

Vi får

$$(z_1 z_2)^{26} = \left(\frac{1}{2}e^{i\pi/4} \cdot 2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^{26} = \left(e^{-i\frac{\pi}{12}}\right)^{26} = e^{-i\frac{26\pi}{12}} = e^{-i\frac{13\pi}{6}} = e^{-i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$$

Svar: $\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$



b)$|z - (2+2i)| \leq 1$ innebär alla z på en cirkelskiva med radie 1 och medelpunkt i $2+2i$. $0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}$ innebär alla z mellan strålarna $\theta = 0$ och $\theta = \frac{\pi}{4}$. Båda villkoren gäller därmed för alla z inom och på randen av det skuggmarkerade området i figuren.

4. a) Se kursboken.
b)

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin x \Leftrightarrow [\text{se a) − uppgiften}] \Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow$$
$$3x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - x + n \cdot 2\pi \text{ eller } 3x - \frac{\pi}{3} = -\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + n \cdot 2\pi \Leftrightarrow$$
$$4x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi \text{ eller } 2x = -\frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \Leftrightarrow \ x = \frac{5\pi}{24} + n \cdot \frac{\pi}{2} \text{ eller } x = -\frac{\pi}{12} + n\pi$$

Svar: $x = \frac{5\pi}{24} + n \cdot \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$ eller $x = -\frac{\pi}{12} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$

5. a) Ekvationens termer är alla definierade om $x \in]3,\infty[\cap]-1,\infty[\cap]-\infty,5[=]3,5[= D_{\text{ekv}}$
Alltså:

$$\ln(x-3) + \ln(x+1) = \ln(5-x), 3 < x < 5 \Leftrightarrow$$

$$\ln\big((x-3)(x+1)\big) = \ln(5-x), 3 < x < 5 \Leftrightarrow$$

$$\ln(x^2 - 2x - 3) = \ln(5-x), 3 < x < 5 \Leftrightarrow [\text{ty ln är en omvändbar funktion}]$$

$$x^2 - 2x - 3 = 5 - x, 3 < x < 5 \Leftrightarrow x^2 - x - 8 = 0, 3 < x < 5 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2}$$

Vi har $x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2} > \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{25}}{2} = \frac{6}{2} = 3$ och $x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2} < \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{36}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{6}{2} = \frac{7}{2} < 5$, så $x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2} \in D_{\text{ekv}}$.

Anm: Roten $x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2}$ duger inte ty $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2} < \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{25}}{2} = -2 < 3$, d.v.s. $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2} \notin D_{\text{ekv}}$.

Svar: $x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2}$.

b)

$$y = \ln(x-1)^2,\, x > 1 \Leftrightarrow e^y = (x-1)^2, x > 1, e^y > 0 \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{e^y}, y \in \mathbb{R}$$

Alltså har f invers med $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{e^x}, x \in \mathbb{R}$

Svar: $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{e^x}, x \in \mathbb{R}$

6. Eftersom planet är parallellt med de båda vektorerna låter vi $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ vara en vektor som är ortogonal mot dessa vektorer, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ respektive $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Då skall det gälla att

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\ \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} A = & -t \\ B = & t \\ C = & t \end{cases}$$

Vi har alltså $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och kan (t.ex.) välja vektorn $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ som normal till planet. Om α är vinkeln mellan planets normal och linjens riktningsvektor $\mathbf{v}$ så är den sökta vinkeln $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, så vi söker först vinkeln α. RITA FIGUR!

Vi har

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{u}||\mathbf{n}|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}{\sqrt{2}\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Leftrightarrow \alpha = \arccos\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Alltså är α spetsig, vilket innebär att den sökta vinkeln

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{\sqrt{6}}{3} = \arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$$

Svar: Vinkeln mellan planet och linjen är $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$

7. Vi skall visa att påståendet $P(n): \sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{3^k} = 3 - \frac{2n+3}{3^n}$ gäller för alla $n \in \mathbb{Z}^+$.

Bevismetod: Induktion

Steg I

$$V(1) = \sum_{k=1}^{1} \frac{4k}{3^k} = \frac{4 \cdot 1}{3^1} = \frac{4}{3} \qquad H(1) = 3 - \frac{2 \cdot 1 + 3}{3^1} = 3 - \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$$

Alltså har vi $V(1) = H(1)$, d.v.s. $P(1)$ gäller.

Steg II

Vi antar att $P(p)$ gäller för ett godtyckligt $p \in \mathbb{Z}^+$, d.v.s. vi antar att $\sum_{k=1}^{p} \frac{4k}{3^k} = 3 - \frac{2p+3}{3^p}$,

vilket leder till att

$$V(p+1) = \sum_{k=1}^{p+1} \frac{4k}{3^k} = \sum_{k=1}^{p} \frac{4k}{3^k} + \frac{4(p+1)}{3^{p+1}} \underset{\text{Enligt antagandet}}{\overset{*}{=}} 3 - \frac{2p+3}{3^p} + \frac{4p+4}{3^{p+1}} = 3 - \frac{3(2p+3)}{3^{p+1}} + \frac{4p+4}{3^{p+1}} =$$

$$= 3 - \frac{6p+9-4p-4}{3^{p+1}} = 3 - \frac{2p+5}{3^{p+1}} = 3 - \frac{2(p+1)+3}{3^{p+1}} = H(p+1)$$

Alltså: $V(p) = H(p) \Rightarrow V(p+1) = H(p+1)$ d.v.s. om $P(p)$ gäller så gäller även $P(p+1)$.

Steg III

Påståendet gäller enligt I för $n = 1$. Enligt II gäller det då även för $n = 1+1 = 2$. Då gäller det även för $n = 2+1 = 3$ o.s.v. Via matematisk induktion gäller påståendet för alla $n \in \mathbb{Z}^+$, v.s.v.