TENTAMEN

Datum:	25 augusti 2016
Tid:	8-12
Provkod:	TEN1
Kursnamn:	TNSL05 – Optimering, modellering och planering
Institution:	ITN
Antal uppgifter:	5
Betygskrav:	För godkänt krävs normalt 12 p, betyg 4 kräver 16p och betyg 5, 21p.
Examinator:	Joakim Ekström
Jourhavande lärare:	Joakim Ekström, 011-363011
Kursadministratör:	Marie-Louise Gustafsson, 011-363121
Tillåtna hjälpmedel:	Miniräknare, ett A4-blad med valfri text/bilder/anteckningar på båda sidor, ordlista för översättning till svenska efter behov

Utlämning av skrivningar sker tidigast efter att resultat har meddelats med e-post. Kortfattat lösningsförslag publiceras på kursens hemsida vid skrivningstidens slut.

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden Du gör.
Använd alltid de standardmetoder som behandlats på föreläsningar och lektioner.
Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget de uppgifter Du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.
Om du bifogar sidor från tentamen måste dessa sidor rivas ut och lämnas in som numrerade lösblad

(5p) **Uppgift 1**

Ett företag som tillverkar lergods kan tillverka fyra olika typer av serviser, med namnen: Engelsk, Svea, Rosenblom och Blåmes. Servisen Rosenblom kan dessutom tillverkas med två olika produktionsmetoder. För att producera en fullständig uppsättning av en servis används resurserna lera, emalj, tid i torkrum och tid i ugn. I tabellen nedan återges hur mycket av varje resurs som krävs för att tillverka en fullständig servis (för Rosenblom återges resurser för de två olika produktionsmetoderna), tillgängliga resurser för den kommande produktionsperioden samt vinsten vid försäljning av en fullständig servis.

Resurs	Engelsk	Svea	Rosenblom 1	Rosenblom 2	Blåmes	Totalt tillgängligt
Lera (kg)	10	15	10	10	20	130
Emalj (kg)	1	2	2	1	1	13
Torkrum (h)	3	1	6	6	3	45
Ugn (h)	2	4	2	5	3	23
Vinst (kr)	5100	10200	6600	6600	8900	

Tillverkaren har bestämt sig för att tillverka lika mycket av Rosenblom med produktionsmetod 1 och 2.

Din uppgift är att formulera företagets vinstmaximeringsproblem som ett LP (dvs. ett linjärt problem med kontinuerliga variabler), för att bestämma optimal produktion för den kommande produktionsperioden.

Det finns inget krav att använda summering och indexering för att lösa uppgiften. Däremot måste ingående variabler och ev. parametrar definieras.

(5p) Uppgift 2

Ett företag tillverkar papper. Pappret kan produceras från antingen nytillverkad pappersmassa, returpapper från högkvalitativt papper (retur 1) eller returpapper från tidningspapper (retur 2). Det finns fyra olika processer som kan användas vid tillverkningen. Att producera 1 ton papper kräver beroende på process råvaror (i ton) enligt följande tabell, där även kostnaden att producera ett ton papper med respektive process återfinns.

Process	Massa	Retur 1	Retur 2	Kostnad
1	3			2400
2	1	4		2400
3	1		12	2600
4		8		3200

Tillgången på massa, retur 1 och retur 2 är begränsad till respektive 80, 600 och 200 ton. Uppgiften är att bestämma optimal tillverkningsstrategi då målet är att tillverka minst 100 ton papper till minimal kostnad. Problemet har formulerats som ett LP-problem.

Variabeldefinition: x_i: antal ton papper som tillverkas med process *i*, *i=1,2,3,4.*

$$\min z = 2400x_1 + 2400x_2 + 2600x_3 + 3200x_4$$

då

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\geq 100 && \text{(producera minst 100 ton papper)} \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &\leq 80 && \text{(begränsad tillgång på massa)} \\ 4x_2 + 8x_4 &\leq 600 && \text{(begränsad tillgång på retur1)} \\ 12x_3 &\leq 200 && \text{(begränsad tillgång på retur2)} \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Modellen har lösts med CPLEX/AMPL och utdata finns på nästa sida. Utgå från utdatan och besvara följande frågor och motivera tydligt dina svar.

a) Hur mycket kan kostnaden för Process 3 ändras utan att den optimala lösningen förändras? Ange både uppåt och nedåt. (1p)

b) Företaget blir erbjudet att köpa in massa från en annan leverantör. Att använda denna massa skulle ge en merkostnad på 500kr per producerat ton. Kommer företaget vara intresserade av att använda denna massa? Om det är intressant att använda denna massa, hur skulle kostnaden minska om företaget använder 10 ton masa från den nya leverantören? (2p)

c) Att tillverka ytterligare ett ton papper på marginalen, dvs. att tillverka ytterligare ett ton utöver det som tillverkas nu skulle kosta företaget 3200kr. Denna kostnad per ton är korrekt för en ökning upp till totalt 115 ton. Kan kostnaden per ton förväntas öka eller minska vid en produktionsökning som är större än så? *(Denna delfråga kan besvaras utan ytterligare information från utdatatabellen, men svaret måste motiveras)* (2p)

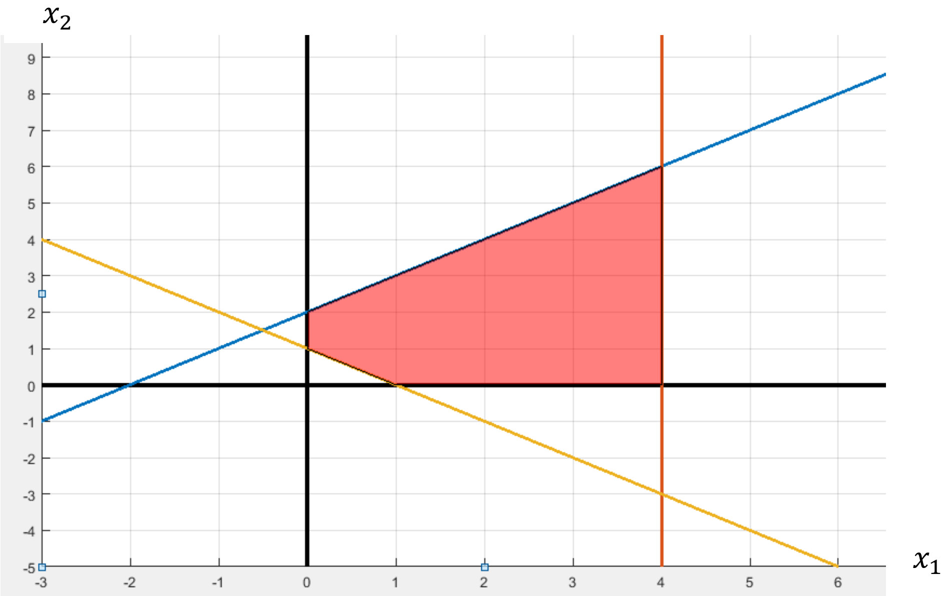
```
CPLEX 11.0.1: sensitivity
CPLEX 11.0.1: optimal solution; objective 256000
3 dual simplex iterations (0 in phase I)

suffix up OUT;
suffix down OUT;
suffix current OUT;
z = 256000

: _varname _var _var.rc    :=
1   'x[1]'       0   1600
2   'x[2]'      80      0
3   'x[3]'       0    200
4   'x[4]'      20      0
;

: _varname _var.down _var.current _var.up    :=
1   'x[1]'      800     2400     1e+20
2   'x[2]'   -1e+20     2400      2600
3   'x[3]'     2400     2600     1e+20
4   'x[4]'     2400     3200     1e+20
;

:      _conname       _con.slack _con.dual    :=
1   producera_100_ton      0      3200
2   begransad_massa        0      -800
3   begransad_retur1     120         0
4   begransad_retur2     200         0
;

:      _conname       _con.down _con.current _con.up    :=
1   producera_100_ton     80       100        115
2   begransad_massa       50        80        100
3   begransad_retur1     480       600      1e+20
4   begransad_retur2       0       200      1e+20
;
```

(5p) Uppgift 3

Betrakta följande minimeringsproblem (i ursprunglig tentamen var det felaktigt skrivet maximeringsproblem):

$\min z = x_1 + x_2$
då $-x_1 + x_2 \leq 2$ (bvk1)
$x_1 \leq 4$ (bvk2)
$x_1 + x_2 \geq 1$ (bvk3)
$x_1, x_2 \geq 0$

a) Formulera problemet på standardform. (1p)
b) Det tillåtna området (gråmarkerat) är illustrerat i figuren nedan.



En tillåten lösning har erhållits i punkten $x = \binom{4}{6}$. Utnyttja figuren ovan och bestäm för var och en av sökriktningarna nedan om de är tillåtna sökriktningar från den aktuella lösningen.

i) $\binom{1}{1}$
ii) $\binom{-2}{-3}$
iii) $\binom{0}{-1}$

(2p)

c) Vilken/vilka av de tre sökriktningarna ovan skulle kunna erhållas i en simplexiteration? (*Besvara frågan utan att ställa upp en simplextablå*) (2p)

(5p) Uppgift 4

Betrakta följande linjära optimeringsproblem

$\max z = x_1 + x_2 + 3x_3 - 5x_4$

då $x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 20$

$x_3 + x_6 = 5$

$2x_1 + x_2 + x_3 + x_7 = 10$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$

Problemet har lösts med simplexmetoden, och optimaltablån återges nedan.

	z	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	b
z	1	1	0	0	5	0	2	1	20
x2	0	2	1	0	0	0	-1	1	5
x3	0	0	0	1	0	0	1	0	5
x5	0	-3	0	0	1	1	0	-2	0

Besvara följande delfrågor

a) Ange optimallösning och optimalt målfunktionsvärde. (1p)
b) Hur kan målfunktionskoefficienten framför x_2 ändras utan att optimallösningen påverkas? (2p)
c) Antag att det istället är ett minimeringsproblem. Tablån motsvarar då inte en optimallösning. Vilken variabel skulle bli inkommande och vilken variabel skulle bli utgående vid en ny iteration med simplexmetoden i detta fall? (2p)

(5p) Uppgift 5

För varje minkostnadsflödesproblem finns en ekvivalent LP-formulering. Nedan återfinns en sådan LP-formulering av ett minkostnadsflödesproblem. Din uppgift är att formulera om problemet på nätverksform. För bågar ska riktning anges samt kostnad, undregräns och övregräns på flödet. För noder ska nodstyrka anges om denna är skild från noll.

Du behöver inte konstruera någon tillåten lösning, dvs. du behöver ej sätta ut några flöden i nätverket.

Variabeldefinition:
x_{ij}=flöde mellan nod *i* och *j*

$\min z = 8x_{AC} + 7x_{AB} + 5x_{AD} + 7x_{BD} - 2x_{BC}$

Då $-x_{AB} - x_{AC} - x_{AD} = -8$
$x_{AB} - x_{BC} - x_{BD} = 0$
$x_{AC} + x_{BC} + x_{DC} = 5$
$x_{AD} + x_{BD} - x_{DC} = 3$
$2 \leq x_{AB} \leq 6$
$2 \leq x_{AC} \leq 8$
$0 \leq x_{AD} \leq 5$
$0 \leq x_{BC} \leq 1$
$0 \leq x_{BD} \leq 10$
$0 \leq x_{DC} \leq 8$