TNA001 - FÖ 2 Kap 1.3, 1.4 (t.o.m. sid. 26)

1.3 Ekvationer, koordinatsystem och räta linjer, cirkelns ekvation

(Anm: Eventuellt tas cirkelns ekvation upp på lektionstid)

a) Ekvationslösning

Exempel 6
Lös fullständigt, med angivande av ekvivalens- och/eller implikationspilar, följande ekvationer. **Kontrollera resultatet.**

a) $2x - 8 = 5 - 3x$ b) $x^3 = x^2$

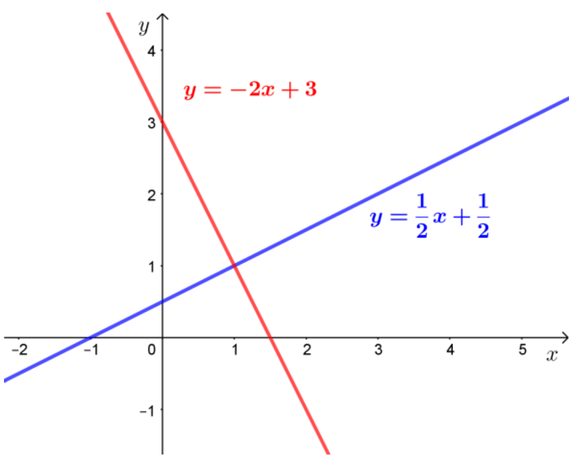
b) **Räta linjer**, **normal** till rät linje.

Inledning

1. Vad menas med ekvationen för en rät linje?
2. Hur kan man skriva ekvationen för en rät linje (olika sätt)?
3. I vissa fall kan ekvationen för en rät linje skrivas $y = y_0$. Vad innebär det?
4. I vissa fall kan ekvationen för en rät linje skrivas $x = x_0$. Vad innebär det?

Exempel 7

a) Bestäm en ekvation för den räta linje som går genom punkterna $(-2, 7)$ och $(1, 1)$.
b) Undersök om punkterna $(-1, 5)$ och $(50, -103)$ ligger på linjen.
c) Bestäm linjens skärningspunkter med koordinataxlarna.
d) Bestäm en ekvation till normalen till linjen i punkten $(1, 1)$.



$y = -2x + 3$
$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
y
x
4
3
2
1
-1
-2
-1
0
1
2
3
4
5

1.4 Mer om ekvationer m.m.

a) Kvadratrötter

Kvadratroten ur ett reellt tal $a \geq 0$, $\sqrt{a}$, definieras som det ickenegativa reella tal vars kvadrat är lika med a, d.v.s.

$$x = \sqrt{a} \Leftrightarrow x^2 = a, x \geq 0.$$

Alltså är

$$\sqrt{49} = 7 \text{ ty } 7^2 = 49 \text{ och } 7 \geq 0$$

och

$$\sqrt{1\tfrac{9}{16}} = \frac{5}{4} \text{ ty } \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} = \frac{25}{16} = 1\frac{9}{16} \text{ och } \frac{5}{4} \geq 0.$$

Om vi nu vill lösa andragradsekvationen $x^2 = a$, där $a \geq 0$, kan vi skriva om denna med hjälp av

konjugatregeln:

$$x^2 = a \Leftrightarrow x^2 - a = 0 \Leftrightarrow x^2 - \left(\sqrt{a}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \sqrt{a}\right)\left(x + \sqrt{a}\right) = 0$$

och vi har två fall, vilket ger två rötter (nollprodukt)

- Fall 1: $x - \sqrt{a} = 0 \Leftrightarrow x_1 = \sqrt{a}$
- Fall 2: $x + \sqrt{a} = 0 \Leftrightarrow x_2 = -\sqrt{a}$

Vi sammanfattar detta:

Ekvationen $x^2 = a$, där $a \geq 0$, har de båda rötterna $x_1 = \sqrt{a}$ och $x_2 = -\sqrt{a}$.

Anm 1. Man skriver ofta detta som $x_{1,2} = \pm\sqrt{a}$.

Anm 2. Om $a = 0$ sammanfaller de båda rötterna till en s.k. dubbelrot $x_{1,2} = 0$

Anm 3. Om $a < 0$ saknas reella rötter d. v. s. $x \in \emptyset$.

Exempelvis har vi

$$x^2 = 49 \Leftrightarrow x^2 - 49 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \sqrt{49}\right)\left(x + \sqrt{49}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{49} \text{ eller } x = -\sqrt{49} \Leftrightarrow x = 7 \text{ eller } x = -7$$

och

$$x^2 = 7 \Leftrightarrow x^2 - 7 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \sqrt{7}\right)\left(x + \sqrt{7}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{7} \text{ eller } x = -\sqrt{7}.$$

Anm: Ekvationen $x^2 = -49$ har inga reella rötter, ty $x^2 \geq 0$ för alla reella tal x. Om vi vill lösa ekvationen får vi komplexa rötter genom att vi arbetar på följande sätt, där i är den imaginära enheten med $i^2 = -1$

$$x^2 = -49 \Leftrightarrow x^2 + 49 = 0 \Leftrightarrow x^2 - i^2 49 = 0 \Leftrightarrow (x - i \cdot 7)(x + i \cdot 7) = 0 \Leftrightarrow x = 7i \text{ eller } x = -7i.$$

b) Kvadratkomplettering och andragradsekvationer

Ett andragradspolynom på formen $ax^2 + bx + c$ måste i många fall kunna uttryckas som en summa eller en differens av två kvadrater. Metoden kallas **kvadratkomplettering** och man använder då någon av kvadreringsreglerna för att *komplettera* x^2- och x -termerna med ett tal så att en kvadrat erhålls. Metoden demonstreras via några exempel.

Exempel 8
Kvadratkomplettera uttrycken
a) $x^2 + 6x + 7$ b) $2x^2 - \frac{x}{3} - \frac{1}{4}$ c) $-x^2 + 7x - 13$
Anmärkning:
Uttrycket i a) är ≥ -2. Varför? Det minsta värdet antas då $x = -3$. Varför?
Uttrycket i b) är $\geq -\frac{19}{72}$. Varför? För vilket värde på x antas detta minsta värde?

Andragradsekvationer, ekvationer med rationella uttryck, rotekvationer.

Exempel 9
Lös ekvationerna

a) $(x-3)(x+1)=0$ b) $(2x+5)(1-3x)=0$ c) $x^2-2x-3=0$

d) $3x^2+4x=3$ e) $\frac{2x+7}{x+2}-\frac{1}{x}=2$ f) $\frac{1}{x}-\frac{1}{x-x^2}=0$

g) $\sqrt{x-3}=5-x$ (exempel på en ”rotekvation”) h) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}=1$

Lösning:

a) Nollprodukt ger

$$(x-3)(x+1)=0 \Leftrightarrow x-3=0 \text{ eller } x+1=0 \Leftrightarrow x=3 \text{ eller } x=-1$$

Svar: $x=3$ eller $x=-1$

b) Nollprodukt ger

$$(2x+5)(1-3x)=0 \Leftrightarrow 2x+5=0 \text{ eller } 1-3x=0 \Leftrightarrow 2x=-5 \text{ eller } -3x=-1$$
$$\Leftrightarrow x=-\frac{5}{2} \text{ eller } x=\frac{1}{3}$$

Svar: $x=-\frac{5}{2}$ eller $x=\frac{1}{3}$

c) Vi får

$$x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow \text{/kvadratkomplettera/}$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2-(1)^2-3=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2-4=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2=4$$
$$\Leftrightarrow x-1=\sqrt{4} \text{ eller } x-1=-\sqrt{4}$$
$$\Leftrightarrow x=3 \text{ eller } x=-1$$

Alternativ med konjugatregeln:

$$x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow \text{/kvadratkomplettera/}$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2-(1)^2-3=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2-4=0 \Leftrightarrow (x-1)^2-2^2=0$$
$$\Leftrightarrow \text{/konjugatregeln/}$$
$$\Leftrightarrow \big((x-1)-2\big)\big((x-1)+2\big)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-3)(x+1)=0$$
$$\Leftrightarrow x-3=0 \text{ eller } x+1=0$$
$$\Leftrightarrow x=3 \text{ eller } x=-1$$

Svar: $x=3$ eller $x=-1$

d) Vi får

$$3x^2 + 4x = 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{4}{3}x - 1 = 0 \Leftrightarrow /\text{kvadratkomplettera}/$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{13}{9} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{13}{9}$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{2}{3} = \pm\frac{\sqrt{13}}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{13}}{3} \text{ eller } x = -\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{13}}{3}$$

Alternativ lösningsgång:

$$3x^2 + 4x = 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{4}{3}x - 1 = 0 \Leftrightarrow /\text{kvadratkomplettera}/$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{13}{9} = 0 \Leftrightarrow /\text{konjugatregeln}/$$

$$\Leftrightarrow \left(\left(x + \frac{2}{3}\right) - \sqrt{\frac{13}{9}}\right)\left(\left(x + \frac{2}{3}\right) + \sqrt{\frac{13}{9}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \left(\frac{2}{3} - \sqrt{\frac{13}{9}}\right)\right)\left(x + \left(\frac{2}{3} + \sqrt{\frac{13}{9}}\right)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{2}{3} + \sqrt{\frac{13}{9}} \text{ eller } x = -\frac{2}{3} - \sqrt{\frac{13}{9}}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 + \sqrt{13}}{3} \text{ eller } x = \frac{-2 - \sqrt{13}}{3}$$

Svar: $x = -\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{13}}{3}$ eller $x = -\left(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{13}}{3}\right)$

Ekvationer med rationella uttryck

Innan vi löser ekvationen försöker vi undersöka för vilka x ekvationen är definierad så att vi kan avslöja eventuella falska rötter då vi löst ekvationen.
Vi börjar med att multiplicera *alla* termer i båda leden i ekvationen med den minsta gemensamma nämnare (MGN). Då får vi en polynomekvation (se FÖ 3).

e) Vi har att $x \neq -2, x \neq 0$ då dessa värden gör att det blir division med noll, som ej är definierat.

Vi får

$$\frac{2x+7}{x+2} - \frac{1}{x} = 2 \iff \text{/Multiplicera ekvationen med MGN} = x(x+2)/$$

$$\iff x(x+2)\left(\frac{2x+7}{x+2} - \frac{1}{x}\right) = 2x(x+2)$$

$$\iff x(x+2)\frac{2x+7}{x+2} - x(x+2)\frac{1}{x} = 2x(x+2) \iff \text{/Förkorta gemensamma faktorer i VL/}$$

$$\iff x(2x+7) - (x+2) = 2x(x+2)$$

$$\iff 2x^2 + 7x - x - 2 = 2x^2 + 4x$$

$$\iff 2x = 2 \iff x = 1$$

Eftersom $x = 1$ är ett tillåtet värde på x så är ekvationens lösning $x = 1$.

Svar: $x = 1$

f) Vi har $x \neq 1, x \neq 0$. Vi får

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x - x^2} = 0 \iff \frac{1}{x} - \frac{1}{x(1-x)} = 0$$

$$\iff \text{/Multiplicera ekvationen med MGN} = x(1-x)/$$

$$\iff x(1-x)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x(1-x)}\right) = 0$$

$$\iff x(1-x)\frac{1}{x} - x(1-x)\frac{1}{x(1-x)} = 0$$

$$\iff 1 - x - 1 = 0 \iff x = 0$$

Då vi från början har att $x \neq 0$ så är alltså $x = 0$ inte en rot till ekvationen. Vi säger att $x = 0$ är en s.k. **falsk rot**, vilket alltså innebär att den givna ekvationen **saknar lösning**.

Svar: Ekvationen saknar lösning.

<u>Rotekvationer</u> (den sökta variabeln, t.ex. x, förekommer under ett eller flera rottecken i ekvationen)

Rotekvationer löser vi genom att kvadrera båda sidorna i ekvationen en eller flera gånger, tills vi får en ekvation som saknar kvadratrötter.

Vi börjar med ett exempel som visar att det kan uppstå falska rötter vid en kvadrering av båda leden:
Antag att vi har villkoret (ekvationen) $x = -3$. Om vi kvadrerar får vi det nya villkoret (nya ekvationen) $x^2 = 9$, som har lösningarna $x = 3$ eller $x = -3$. Här är alltså $x = 3$ en falsk lösning till den ursprungliga ekvationen (villkoret) $x = -3$. Vi har alltså

$$x = -3 \qquad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{(OBS!Inte ekvivalens!)}} \qquad x^2 = 9$$

medan

$$x^2 = 9 \Leftrightarrow x = -3 \text{ eller } x = 3.$$

g) Om vi i ekvationen, se nedan, kvadrerar båda leden får vi villkoret $x - 3 = (5 - x)^2$. *Men vi får precis samma villkor om vi kvadrerar ekvationen* $\sqrt{x-3} = -(5 - x)$. Det betyder att det vid kvadreringen kan uppstå falska rötter, därav *implikationen* i första steget i lösningen nedan.

Vi får

$$\sqrt{x-3} = 5 - x \quad /\text{kvadrera}/$$

$$/\textbf{OBS! Implikation} - \textbf{INTE ekvivalens}/$$

$$\Rightarrow x - 3 = (5 - x)^2$$

$$\Leftrightarrow x - 3 = 25 - 10x + x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 11x + 28 = 0 \Leftrightarrow /\text{kvadratkomplettera}/$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{11}{2}\right)^2 - \frac{121}{4} + \frac{112}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{11}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{11}{2} = \pm\sqrt{\frac{9}{4}}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{11}{2} + \frac{3}{2} = 7 \text{ eller } x = \frac{11}{2} - \frac{3}{2} = 4$$

Eftersom vi har ekvivalenser överallt ovan UTOM mellan första och andra raden, *kan falska rötter (lösningar) ha uppstått*. Det innebär att vi här måste vi pröva lösningarna i den *ursprungliga* ekvationen.

Med $x = 7$ får vi $\begin{cases} \text{VL} = \sqrt{7-3} = 2 \\ \text{HL} = 5 - 7 = -2 \end{cases}$, d.v.s. $\text{VL} \neq \text{HL}$ för $x = 7$. Alltså är $x = 7$ INTE lösning.

Med $x = 4$ får vi $\begin{cases} \text{VL} = \sqrt{4-3} = 1 \\ \text{HL} = 5 - 4 = 1 \end{cases}$, d.v.s. $\text{VL} = \text{HL}$ för $x = 4$. Alltså är $x = 4$ lösning.

Svar: Ekvationen har (den enda) lösningen $x = 4$.

h) Vi får

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2} = 1 \Rightarrow (x+1) - 2\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-2} + (x-2) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2x - 2 = 2\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-2}$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-2}$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = (x+1)(x-2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = x^2 - x - 2$$

$$\Leftrightarrow x = 3$$

Prövning ger då $\text{VL} = \sqrt{3+1} - \sqrt{3-2} = 2 - 1 = 1$ och $\text{HL} = 1$ d.v.s. $\text{VL} = \text{HL}$ och $x = 3$ är en lösning till ekvationen.

Svar: Ekvationen har lösningen $x = 3$.

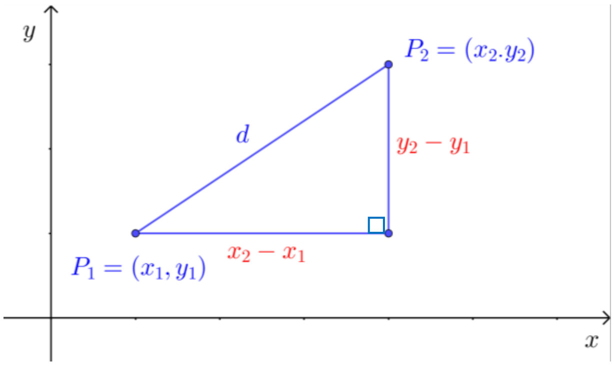
I detta exempel behövde ekvationen kvadreras två gånger eftersom det vid den första kvadreringen uppkommer en dubbel produkt med kvadratrötter.

c) Avstånd mellan punkter.

Avståndet d mellan två punkter $P_1 = (x_1, y_1)$ och $P_2 = (x_2, y_2)$ i ett ortonormerat koordinatsystem ges av

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Geometriskt bevis:



Pythagoras sats ger $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ och vi får $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Exempel 10
Bestäm avståndet mellan punkterna $(1, -3)$ och $(-2, -5)$.

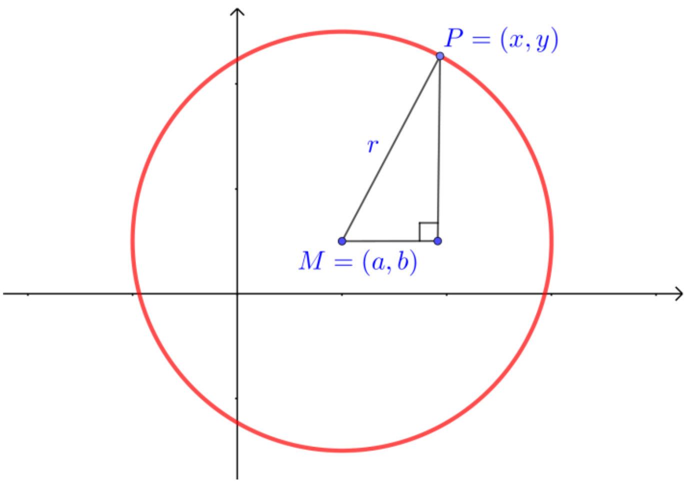
d) Cirkelns ekvation

En cirkel med medelpunkt i punkten (a, b) och vars radie är r har ekvationen

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Anm: Koordinatsystemet måste vara ortonormerat.

Sambandet följer direkt ur avståndsformeln ovan.



Exempel 11

a) Bestäm ekvationen för en enhetscirkel med origo som medelpunkt.

b) Bestäm en ekvation för en cirkel vars medelpunkt är $(1, -2)$ och vars radie är 3.

c) Bestäm medelpunkt och radie för den cirkel som har ekvationen $x^2 + y^2 + 6y + 5 = 0$.