

TNA001 - FÖ 1 Kap 1.1-1.2

1.1 Mängder av reella tal

a) Beteckningar för olika typer av reella tal.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Naturliga talen

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Heltalen

$$\mathbb{Z}^+ = \{x \in \mathbb{Z} : x > 0\} \subset \mathbb{Z}$$

Positiva heltalen

$$\mathbb{Z}^- = \{x \in \mathbb{Z} : x < 0\} \subset \mathbb{Z}$$

Negativa heltalen

$$\mathbb{Q} = \left\{x: x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$$

Rationella talen

$$\mathbb{R} = \{x: x \text{ är alla rationella och irrationella tal}\}$$

Reella talen

b) Några begrepp ur mängdläran

Exempel 1

Betrakta mängderna

$$A = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 5 \text{ och } x \neq 0\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Läses: "Mängden av alla x som tillhör de naturliga talen, och som är sådana att x är mindre än eller lika med 5 och skilda från 0."

$$B = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ jämnt och } x < 8\} = \{0, 2, 4, 6\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{Z}^+ : x \geq 7\} = \{7, 8, 9, \dots\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} : (x - 1)(x - 2) = 0\} = \{1, 2\}$$

Vi har

$$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

(**Unionen** av A och B)

$$A \cap B = \{2, 4\}$$

(**Snittet** av A och B)

$$A \cap C = \{ \} = \emptyset$$

(\emptyset = **tomma mängden**)

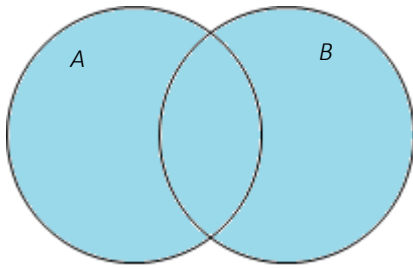
$$D \subseteq A$$

(D är en **delmängd** av A
ty varje element i D är också element i A)

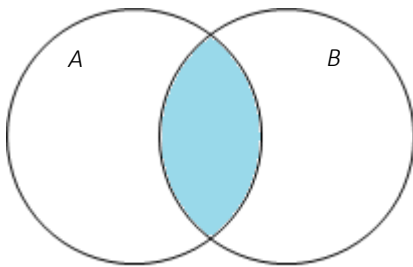
Vi har t.o.m. $D \subset A$

(D är en **äkta delmängd** av A ty varje element i D är också element i A och det finns element i A som ej tillhör D)

Fig. 1



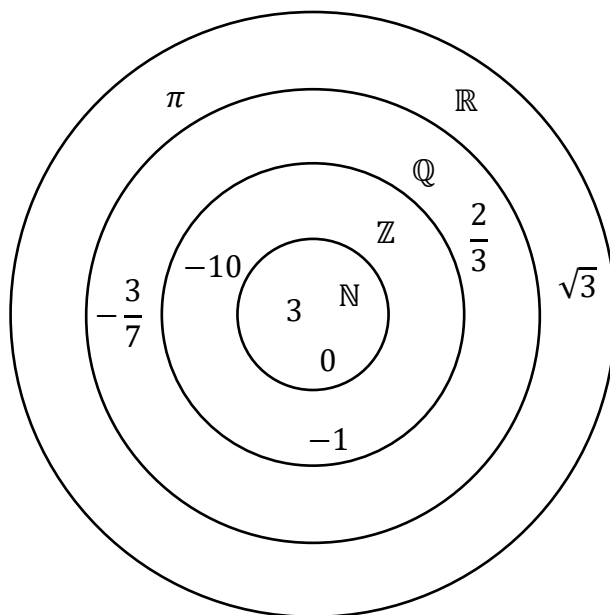
$$A \cup B = \{x: x \in A \text{ eller } x \in B\}$$



$$A \cap B = \{x: x \in A \text{ och } x \in B\}$$

c) Hur bildar de olika typerna av reella tal **delmängder** av varandra?

Fig. 2



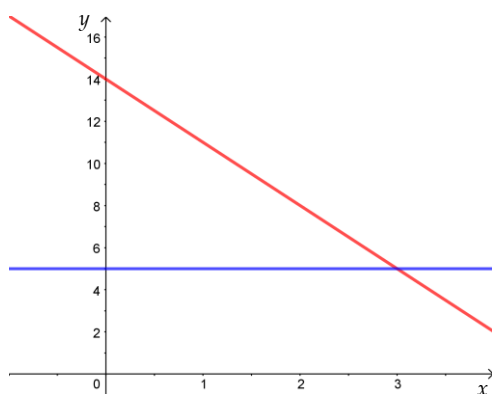
- d) Hur kan man skriva och illustrera **intervall** (slutna, öppna, halvöppna)?
Vi bestämmer lösningsmängden till olikheterna i följande exempel:

Exempel 2

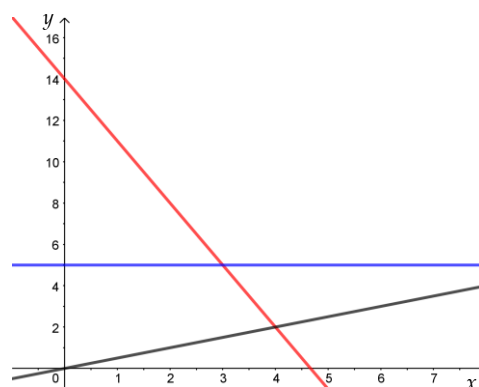
Lös olikheterna

a) $14 - 3x < 5$

b) $\frac{x}{2} \leq 14 - 3x < 5$



a)



b)

e) **Implikation, ekvivalens.**

\Rightarrow : Implikation: $P \Rightarrow Q$: P implicerar (medför) Q

\Leftrightarrow : Ekvivalens: $P \Leftrightarrow Q$: P är ekvivalent med Q .

Exempel 3

Tolka följande påståenden och avgör om de är sanna eller falska.

a) $x < 4 \Rightarrow x < 2$

b) $x < 4 \Leftrightarrow 4 > x$

c) $x < 4 \Leftrightarrow x < 2$

Exempel 4

Beskriv som ett intervall följande mängder av alla reella tal x sådana att

a)

$$x \in [-3, 3[\cap]-2, 3].$$

b)

$$x \in [-3, 3[\cup]-2, 3].$$

1.2 Algebraisk räkning med reella tal

Här måste du bli säker på följande:

1. Vad menas med *summa*, *differens*, *produkt* och *kvot*.
2. Räknerregler för *potensräkning* med heltalsexponenter. (Även vad som menas med *kvadraten* resp. *kuben* av ett tal.)
3. *Kvadreringsreglerna* (kvadratreglerna)
4. *Konjugatregeln*

Vi exemplifierar några av ovanstående – resten finns i boken sid. 6 – 12

Exempel 5.

a) Om $a \neq 0$ gör vi följande definitioner: $a^0 = 1$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ för $n \in \mathbb{Z}^+$

Exempelvis har vi

$$a^{-1} = \frac{1}{a^1} = \frac{1}{a}, a \neq 0$$

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{1+x}\right)^2} = (1+x)^2, x \neq -1$$

b) $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$, men observera att $-3^2 = -(3^2) = -9$

$$(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$$

c) Faktorisera med hjälp av kvadreringsreglerna

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x + 1) = (x + 1)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)(x - 1) = (x - 1)^2$$

$$4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$$

d) Faktorisera med hjälp av konjugatregeln

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$$

$$16x^2 - 1 = (4x + 1)(4x - 1)$$

$$x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1) = (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$$

e) $\frac{x+1}{x-1} - 1 = \frac{x+1-(x-1)}{x-1} = \frac{2}{x-1}, x \neq 1$

f) $\frac{x}{x+2} + \frac{x-1}{x+1} = \frac{x(x+1)+(x-1)(x+2)}{(x+2)(x+1)} = \frac{x^2+x+x^2+x-2}{(x+2)(x+1)} = \frac{2(x^2+x-1)}{(x+2)(x+1)}, x \neq -2, x \neq -1$