TNA001 - FÖ 1 Kap 1.1-1.2

1.1 Mängder av reella tal

a) **Beteckningar** för olika typer av **reella tal.**

$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4, \dots\}$	Naturliga talen
$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1,0,1,2,3, \dots\}$	Heltalen
$\mathbb{Z}^+ = \{x \in \mathbb{Z} : x > 0\} \subset \mathbb{Z}$	Positiva heltalen
$\mathbb{Z}^- = \{x \in \mathbb{Z} : x < 0\} \subset \mathbb{Z}$	Negativa heltalen
$\mathbb{Q} = \left\{x : x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$	Rationella talen
$\mathbb{R} = \{x : x \text{ reellt}\}$	Reella talen

b) Några begrepp ur **mängdläran**

Exempel 1

Betrakta mängderna

$$A = \underbrace{\{x \in \mathbb{N} : x \leq 5 \wedge x \neq 0\}}_{\substack{\text{Läses:} \\ \text{"Mängden av alla } x \text{ som tillhör de} \\ \text{naturliga talen, och sådana att } x \text{ är} \\ \text{mindre än eller lika med 5} \\ \text{och skilda från 0"}}} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$B = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ jämnt} \wedge x < 8\} = \{0, 2, 4, 6\}$

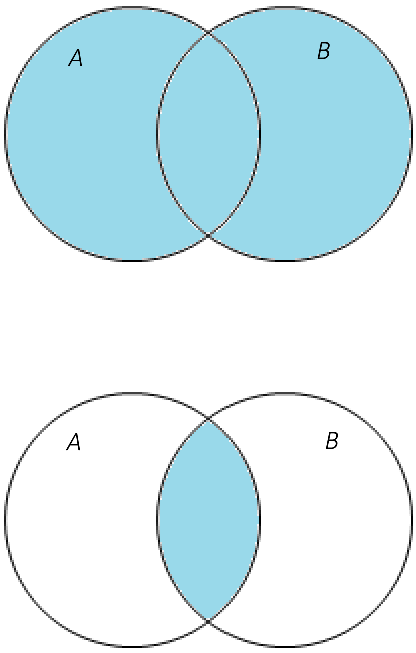
$C = \{x \in \mathbb{Z}^+ : x \geq 7\} = \{7, 8, 9, \dots\}$

$D = \{x \in \mathbb{R} : (x-1)(x-2) = 0\} = \{1, 2\}$

Vi har

$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	(**Unionen** av A och B)
$A \cap B = \{2, 4\}$	(**Snittet** av A och B)
$A \cap C = \{\quad\} = \emptyset$	($\emptyset$ = **tomma mängden**)
$D \subseteq A$	(D är en **delmängd** av A ty varje element i D är också element i A)
Vi har t.o.m. $D \subset A$	(D är en **äkta delmängd** av A ty varje element i D är också element i A och det finns element i A som ej tillhör D)

Fig. 1

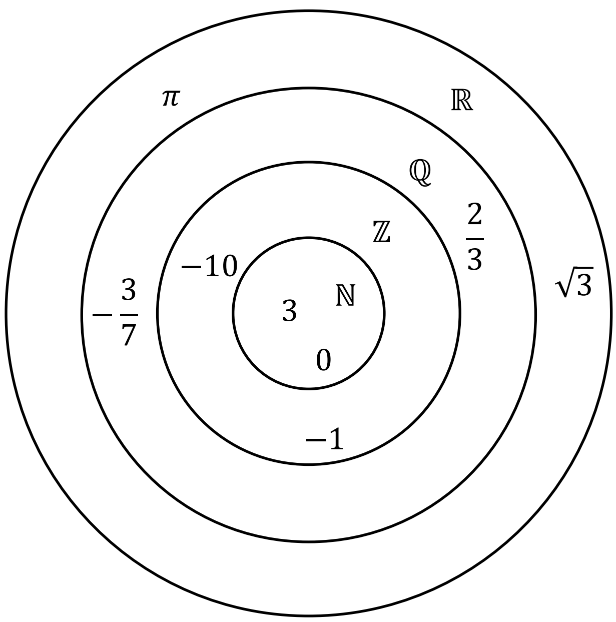


$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ eller } x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ och } x \in B\}$$

c) Hur bildar de olika typerna av reella tal **delmängder** av varandra?

Fig. 2

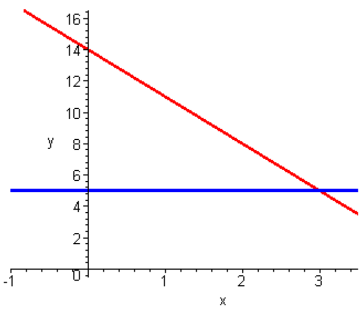


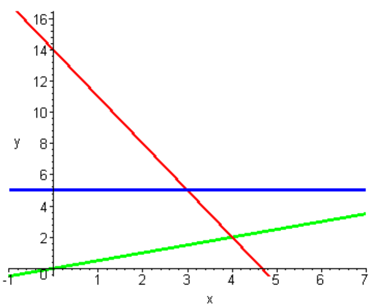
d) Hur kan man skriva och illustrera **intervall** (slutna, öppna, halvöppna)?
Vi bestämmer lösningsmängden till olikheterna i följande exempel:

Exempel 2

Lös olikheterna

a) $14 - 3x < 5$ **b)** $\frac{x}{2} \leq 14 - 3x < 5$





b)

e) **Implikation**, **ekvivalens**.

$\Rightarrow$: Implikation: $P \Rightarrow Q$: P implicerar (medför) Q

$\Leftrightarrow$: Ekvivalens: $P \Leftrightarrow Q$: P är ekvivalent med Q.

Exempel 3
Tolka följande påståenden och avgör om de är sanna eller falska.

a) $x < 4 \Rightarrow x < 2$ b) $x < 4 \Leftrightarrow 4 > x$ c) $x < 4 \Leftrightarrow x < 2$

Exempel 4
Beskriv som ett intervall följande mängder av alla reella tal x sådana att
a)

$$\boldsymbol{x} \in [-\mathbf{3}, \mathbf{3}[\ \cap \ ]-\mathbf{2}, \mathbf{3}].$$

b)

$$\boldsymbol{x} \in [-\mathbf{3}, \mathbf{3}[\ \cup \ ]-\mathbf{2}, \mathbf{3}].$$

1.2 Algebraisk räkning med reella tal

Här måste du bli säker på följande:

1. Vad menas med *summa, differens, produkt* och *kvot*.
2. Räkneregler för *potensräkning* med heltalsexponenter. (Även vad som menas med *kvadraten* resp. *kuben* av ett tal.)
3. *Kvadreringsreglerna* (kvadratreglerna)
4. *Konjugatregeln*

Vi exemplifierar några av ovanstående – resten finns i boken sid. 6 – 12

Exempel 5.

a) Om $a \neq 0$ gör vi följande definitioner: $a^0 = 1$, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ för $n \in \mathbb{Z}^+$

Exempelvis har vi

$$a^{-1} = \frac{1}{a}, a \neq 0$$

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{1+x}\right)^2} = (1+x)^2, x \neq -1$$

b) $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$, men observera att $-3^2 = -(3^2) = -9$

$(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$

c) Faktorisera med hjälp av kvadreringsreglerna

$x^2 + 2x + 1 = (x+1)(x+1) = (x+1)^2$

$x^2 - 2x + 1 = (x-1)(x-1) = (x-1)^2$

$4x^2 - 12x + 9 = (2x-3)^2$

d) Faktorisera med hjälp av konjugatregeln

$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$

$16x^2 - 1 = (4x+1)(4x-1)$

$x^4 - 1 = (x^2+1)(x^2-1) = (x^2+1)(x+1)(x-1)$

e) $\frac{x+1}{x-1} - 1 = \frac{x+1-(x-1)}{x-1} = \frac{2}{x-1}, x \neq 1$

f) $\frac{x}{x+2} + \frac{x-1}{x+1} = \frac{x(x+1)+(x-1)(x+2)}{(x+2)(x+1)} = \frac{x^2+x+x^2+x-2}{(x+2)(x+1)} = \frac{2(x^2+x-1)}{(x+2)(x+1)}, x \neq -2, x \neq -1$