TSKS21 Signaler, information & bilder

Föreläsning 6

Signaler och system – frekvensdomänen, fourierserier och fouriertransformer

Mikael Olofsson
Institutionen för Systemteknik (ISY)
Ämnesområdet Kommunikationssystem

LINKÖPINGS UNIVERSITET

Tidskontinuerliga fourierserier

Jean Baptiste Joseph Fourier
1768 – 1830

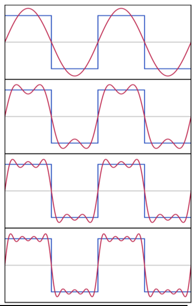
Krav på signalen $x(t)$:

1. Periodisk, period T.
2. Absolutintegrerbar: $\int_0^T |x(t)|\,dt < \infty$
3. Ett ändligt antal lokala min & max i en period.
4. Ett ändligt antal diskontinuiteter i en period.

Då existerar a_0, a_n, b_n för $n \in \{1, 2, \ldots, \infty\}$ så att

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)\right)}_{\text{Ton nummer } k.}$$

gäller för $\omega_0 = 2\pi/T$.



Komplexa fourierseriekoefficienter

Euler: $\cos(k\omega_0 t) = \dfrac{e^{jk\omega_0 t} + e^{-jk\omega_0 t}}{2}$ $\qquad$ $\sin(k\omega_0 t) = \dfrac{e^{jk\omega_0 t} - e^{-jk\omega_0 t}}{j2}$

Resultat: $x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)\right)$

$$= \underbrace{a_0}_{D_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\underbrace{\frac{a_k - jb_k}{2}}_{D_k} e^{jk\omega_0 t} + \underbrace{\frac{a_k + jb_k}{2}}_{D_{-k}} e^{-jk\omega_0 t} \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k e^{jk\omega_0 t}$$

Samband: $D_{-k} = D_k^*, \quad \forall\, k$

Amplitudspektrum: $|D_k|$ $\qquad$ Fasspektrum: $\arg\{D_k\}$

Att bestämma D_k

Betrakta:

$$\int_0^T x(t)\, e^{-jk\omega_0 t} dt = \int_0^T \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_m e^{jm\omega_0 t} e^{-jk\omega_0 t} dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_m \underbrace{\int_0^T e^{j(m-k)\omega_0 t} dt}_{= \begin{cases} 0, & m \neq k \\ T, & m = k \end{cases}} = TD_k$$

Alltså:

$$D_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\, e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Men också:

$$D_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Anledning:

$$x(t+T) = x(t) \qquad \omega_0 = 2\pi/T$$

$$e^{-jk\omega_0 (t+T)} = e^{-jk(\omega_0 t + 2\pi)} = e^{-jk\omega_0 t}$$

Egenskaper hos fourierserieutveckling

Låt $x(t)$ och $y(t)$ vara periodiska signaler med period T och fourierseriekoefficienter C_k respektive D_k.

Signal	Fourierseriekoefficient # k
$ax(t)+by(t)$	aC_k+bD_k
$x(t-\tau)$	$C_k e^{-jk\omega_0\tau}$
$x(at)$	C_k (period T/a)
$\frac{d}{dt}x(t)$	$jk\omega_0 C_k$

Sinus in – sinus ut - principen (fourierserier)

För LTI-system har vi:

Sinus in – Sinus ut (samma frekvens)

Jämför med partikulärlösningen av en differentialekvation.

Också: $j\omega$-metoden.

Linjäritet implicerar:

Σ Sinus in – Σ Sinus ut

Alltså:

Beskriv periodiska signaler med fourierserieutveckling.

Lös problemet för varje sinusterm (komplex exponentialterm).

Linjäritet: Addera resultaten.

Tidskontinuerlig fouriertransform

Krav på signalen $x(t)$:

- Absolutintegrerbar: $\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|\,dt<\infty$
- Ändligt antal diskontinuiteter.
- Begränsad variation: $\int_{-\infty}^{\infty}|x'(t)|\,dt<\infty$

Transform:

$$X(\omega)=\mathscr{F}\{x(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,e^{-j\omega t}\,dt$$

Inverse transform:

$$x(t)=\mathscr{F}^{-1}\{X(\omega)\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega$$

- Spektrum av $x(t)$: $X(\omega)$
- Amplitudspektrum: $|X(\omega)|$
- Fasspektrum: $\arg\{X(\omega)\}$

Utsignal från ett LTI-system

Notation: $A(\omega)=\mathscr{F}\{a(t)\}$ $\quad B(\omega)=\mathscr{F}\{b(t)\}$

Egenskap: $\mathscr{F}\{(a*b)(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}(a*b)(t)\,e^{-j\omega t}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}a(\tau)b(t-\tau)\,d\tau\, e^{-j\omega t}\,dt$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}a(\tau)b(t-\tau)e^{-j\omega t}\,d\tau\,dt=\Big/\begin{matrix}\lambda=t-\tau\\ d\lambda=dt\end{matrix}\Big/=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}a(\tau)b(\lambda)e^{-j\omega(\tau+\lambda)}\,d\tau\,d\lambda$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}a(\tau)e^{-j\omega\tau}\,d\tau\int_{-\infty}^{\infty}b(\lambda)e^{-j\omega\lambda}\,d\lambda=A(\omega)B(\omega)$$

LTI-system:

$$\begin{matrix}x(t)\\X(\omega)\end{matrix}\longrightarrow\boxed{\begin{matrix}h(t)\\H(\omega)\end{matrix}}\longrightarrow\begin{matrix}y(t)=(x*h)(t)\\Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)\end{matrix}$$

Periodiska signaler igen

Observation: $\mathscr{F}^{-1}\{\delta(\omega-\omega_1)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_1)\, e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} e^{j\omega_1 t}$

Alltså: $\mathscr{F}\{e^{j\omega_1 t}\} = 2\pi\delta(\omega-\omega_1)$

Euler:

$$\mathscr{F}\{\cos(\omega_1 t)\} = \mathscr{F}\left\{\frac{e^{j\omega_1 t}+e^{-j\omega_1 t}}{2}\right\} = \pi(\delta(\omega-\omega_1)+\delta(\omega+\omega_1))$$

$$\mathscr{F}\{\sin(\omega_1 t)\} = \mathscr{F}\left\{\frac{e^{j\omega_1 t}-e^{-j\omega_1 t}}{j2}\right\} = \frac{\pi}{j}(\delta(\omega-\omega_1)-\delta(\omega+\omega_1))$$

$x(t)$ periodisk med period T: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k e^{jk\omega_0 t} \quad \Rightarrow \quad X(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

Sinus in – sinus ut - principen – IGEN!

För LTI-system har vi:

Sinus in – Sinus ut (samma frekvens)

Närmare bestämt:

Insignal: $x(t) = \hat{X}\sin(\omega_0 t + \varphi)$

Utsignal: $y(t) = \hat{X}|H(\omega_0)|\sin(\omega_0 t + \varphi + \arg\{H(\omega_0)\})$

Amplitudkarakteristik: $|H(\omega)|$

Faskarakteristik: $\arg\{H(\omega)\}$

Detta är $j\omega$-metoden i kondenserad form.

Viktig egenskap: Derivator

Notation: $X(\omega) = \mathscr{F}\{x(t)\}$

Vi har: $\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\frac{d}{dt}e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{X(\omega)\, j\omega e^{j\omega t}}_{\mathscr{F}\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\}}\, d\omega$$

Resultat:

$$\mathscr{F}\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\} = j\omega X(\omega)$$

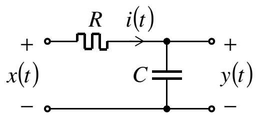
$$\mathscr{F}\left\{\frac{d^k}{dt^k}x(t)\right\} = (j\omega)^k X(\omega)$$

Jämför med impedanser i $j\omega$-metoden.

Viktig egenskap: Derivator – exempel

Notation: $X(\omega) = \mathscr{F}\{x(t)\}$ Vi har: $\mathscr{F}\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\} = j\omega X(\omega)$

Exempel:



Energifritt: $y(t)$ initialt 0.

Kapacitans: $i(t) = C\frac{d}{dt}y(t)$ (1)

Resistans: $x(t) - y(t) = Ri(t)$ (2)

(1) i (2) $\Rightarrow$ $x(t) - y(t) = RC\frac{d}{dt}y(t)$

$\Rightarrow$ $RC\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = x(t)$

Transform $\Rightarrow$

$j\omega RCY(\omega) + Y(\omega) = X(\omega)$

$\Rightarrow$ $(j\omega RC + 1)Y(\omega) = X(\omega)$

$\Rightarrow$ $Y(\omega) = \frac{1}{j\omega RC + 1}X(\omega)$

Transform och inverstransform görs vanligen med en tabell.

Mikael Olofsson
ISY/KS

www.liu.se

LINKÖPINGS UNIVERSITET