

## TENTAMEN

|                      |  |
|----------------------|--|
| Datum:               | 6 april 2018   |
| Tid:                 | 14-18  |
| Provkod:             | TEN1   |
| Kursnamn:            | TNSL05 – Optimering, modellering och planering   |
| Institution:         | ITN  |
| Antal uppgifter:     | 5  |
| Betygskrav:          | För godkänt krävs normalt 12 p, betyg 4 kräver 16p och betyg 5, 21p.   |
| Examinator:          | Joakim Ekström   |
| Jourhavande lärare:  | Marcus Posada, 011-363564  |
| Kursadministratör:   | Marie-Louise Gustafsson, 011-363121  |
| Tillåtna hjälpmedel: | Miniräknare, ett A4-blad med valfri text/bilder/anteckningar på båda sidor, ordlista för översättning till svenska efter behov |

Utlämning av skrivningar sker tidigast efter att resultat har meddelats med e-post. Kortfattat lösningsförslag publiceras på kursens hemsida vid skrivningstidens slut.

### Tentamensinstruktioner

#### När Du löser uppgifterna

*Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.*

*Motivera alla påståenden Du gör.*

*Använd alltid de standardmetoder som behandlats på föreläsningar och lektioner.*

*Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.*

*Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.*

#### Vid skrivningens slut

*Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.*

*Markera på omslaget de uppgifter Du behandlat.*

*Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.*

*Om du bifogar sidor från tentamen måste dessa sidor rivas ut och lämnas in som numrerade lösblad*

## (5p) Uppgift 1

Östgötaskog AB är ett träföretag med 6 avverkningsplatser och 3 sågverk. De vill frakta timmer från avverkningsplatserna till sågverken. Väl vid sågverken sågas timret till brädor, med flis som restprodukt. Brädorna och fliset ska transporteras vidare till 4 kunder. Kunderna,  $k$ , efterfrågar  $D_k^b$  stycken brädor och  $D_k^f$  kubikmeter flis var. Företagets sågverk,  $i$ , har en kapacitet på  $K_i$  timmerstockar. Företaget har lagt upp en avverkningsplan som innebär att tillgången på timmer från avverkningsplatserna,  $j$ , är  $T_j$  timmerstockar under planeringshorisonten. Varje timmerstock ger vid sågning 8 brädor och 0.5 kubikmeter flis. Att transportera en timmerstock från avverkningsplats  $i$  till sågverk  $j$  kostar  $c_{ij}^t$  kr. Att transportera en bräda från sågverk  $j$  till kund  $k$  kostar lika mycket som att transportera en kubikmeter flis,  $c_{jk}^b$ . Träfföretaget vill tillgodose all efterfrågan, men minimera sina transportkostnader. De har valt att modellera sitt transportproblem som ett LP-problem och har ställt upp följande variabeldefinitioner,

$x_{ij}$  = antal timmerstockar som avverkas vid  $i$  och fraktas till sågverk  $j$ ,

$y_{jk}$  = antal brädor som fraktas från sågverk  $j$  till kund  $k$ ,

$z_{jk}$  = antal kubikmeter flis som fraktas från sågverk  $j$  till kund  $k$ .

Formulera företagets kostnadsminimeringsproblem som ett linjärt optimeringsproblem givet variabeldefinitionen ovan.

I denna uppgift behöver du inte använda index och summering när du formulerar din modell, men du får gärna göra så ändå.

Modell:

$$\min z = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^3 c_{ij}^t x_{ij} + \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^4 c_{jk}^b (y_{jk} + z_{jk})$$

då

$$\sum_j x_{ij} \leq T_i, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (\text{Tillgängligt timmer})$$

$$\sum_i x_{ij} \leq K_j, \quad j = 1, 2, 3 \quad (\text{Sågverkens kapacitet})$$

$$\sum_j y_{jk} \geq D_k^b, \quad k = 1, \dots, 4 \quad (\text{Kundernas efterfrågan på brädor})$$

$$\sum_j z_{jk} \geq D_k^f, \quad k = 1, \dots, 4 \quad (\text{Kundernas efterfrågan på träflis})$$

$$\sum_i x_{ij} = 8 \sum_k y_{jk} + \frac{1}{2} \sum_k z_{jk}, \quad j = 1, 2, 3 \quad (\text{En timmerstock ger 8 brädor och } 0.5 \text{ m}^3 \text{ flis})$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, 6, j = 1, 2, 3 \quad (\text{Icke - negativitet})$$

$$y_{jk}, z_{jk} \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, k = 1, 2, 3, 4 \quad (\text{Icke - negativitet})$$

## (5p) Uppgift 2

Ett företag tillverkar fyra olika produkter. De har tillgång till två olika maskiner och vill planera sin produktion för den närmaste månaden. Båda maskinerna kan tillverka varje produkt, dock med olika stor tidsåtgång. Tiden som behövs för att producera en produkt, i timmar, samt den maximala tillgängliga tiden i maskinerna, ges av tabellen nedan.

|        |   | Produkt |     |     |    | Tillgänglig tid |
|--------|---|---------|-----|-----|----|-----------------|
|        |   | 1       | 2   | 3   | 4  |                 |
| Maskin | A | 0,5     | 0,3 | 2   | 10 | 120             |
|        | B | 1,5     | 0,7 | 0,2 | 1  | 80              |

Produktionen kräver fyra olika råvaror. Utöver den tillgängliga maskintiden begränsas produktionen också av råvarutillgången. Åtgången av råvaror för vardera produkt, samt den maximala råvarutillgången, ges nedan.

|        |       | Produkt |     |     |     | Tillgång |
|--------|-------|---------|-----|-----|-----|----------|
|        |       | 1       | 2   | 3   | 4   |          |
| Råvara | $R_1$ | 1       | 5   | 1   | 1   | 300      |
|        | $R_2$ | 2       | 4   | 2   | 1,5 | 500      |
|        | $R_3$ | 0,5     | 2   | 5   | 10  | 600      |
|        | $R_4$ | 5       | 0,4 | 0,5 | 12  | 1000     |

Vinsten för vardera producerad enhet av de fyra produkterna är 80, 150, 70 och 260 kr. Företagets problem att maximera vinsten för den kommande månaden har formulerats som ett linjärt optimeringsproblem och sedan lösts med AMPL/CPLEX.

Variabeldefinitioner:

$x_{ij}$  = antal enheter av  $i$  som tillverkas i maskin  $j$ , där  $i = 1, 2, 3, 4$  och  $j = A, B$

Parametrar:

$t_{ij}$  = antal timmar produktionstid som behövs för produkt  $i$  i maskin  $j$

$M_j$  = maximalt antal tillgängliga timmar i maskin  $j$

$N_k$  = antal tillgängliga enheter av råvara  $k$

$r_{ik}$  = antal enheter av råvara  $k$  som går åt för produktion av en enhet av produkt  $i$

$c_i$  = vinsten per producerad enhet av produkt  $i$

$$\max z = \sum_i \sum_j c_i x_{ij}$$

då

$$\sum_i t_{ij} x_{ij} \leq M_j,$$

$$j = A, B \quad (\text{Produktionstid})$$

$$\sum_i \sum_j r_{ik} x_{ij} \leq N_k,$$

$$k = R_1, R_2, R_3, R_4 \quad (\text{Råvaror})$$

$$x_{ij} \geq 0,$$

$$i = 1, 2, 3, 4, j = A, B \quad (\text{Icke - negativitet})$$

```

CPLEX 12.6.3.0: sensitivity
CPLEX 12.6.3.0: optimal solution; objective 24271.93745
5 dual simplex iterations (1 in phase I)
: _objname      _obj      :=
1  z            24271.9
;

:
:  _varname      _var      _var.rc      :=
1  x[1,'A']      79.2354    7.10543e-15
2  x[1,'B']      0          7.10543e-15
3  x[2,'A']      34.318    -8.88178e-15
4  x[2,'B']      0          -8.88178e-15
5  x[3,'A']      0          -17.6825
6  x[3,'B']      0          -17.6825
7  x[4,'A']      7.00869    1.42109e-14
8  x[4,'B']      42.1659    1.42109e-14
;|

:
:  _varname      _var.down  _var.current  _var.up      :=
1  x[1,'A']      80          80           96.0256
2  x[1,'B']      -1e+20     80           80
3  x[2,'A']      150         150          390.526
4  x[2,'B']      -1e+20     150          150
5  x[3,'A']      -1e+20     70           87.6825
6  x[3,'B']      -1e+20     70           87.6825
7  x[4,'A']      260         260          260
8  x[4,'B']      260         260          260
;

:
:  _conname      _con.slack   _con.dual     :=
1  bvk_maxtid['A']  0           -1.77636e-15
2  bvk_maxtid['B']  37.8341     0
3  bvk_ravaror['R1'] 0           24.5526
4  bvk_ravaror['R2'] 130.495     0
5  bvk_ravaror['R3'] 1.13687e-13 11.6334
6  bvk_ravaror['R4'] 2.27374e-13 9.92615
;

:
:  _conname      _con.down  _con.current  _con.up      :=
1  bvk_maxtid['A']  49.9131    120          541.659
2  bvk_maxtid['B']  42.1659    80           1e+20
3  bvk_ravaror['R1'] 120.455    300          449.23
4  bvk_ravaror['R2'] 369.505    500          1e+20
5  bvk_ravaror['R3'] 155.355    600          906.04
6  bvk_ravaror['R4'] 620         1000         1524.72
;

```

- a) I nuvarande optimallösning produceras inga enheter av produkt 3. Vid vilken vinst kommer produktion av produkt 3 att bli lönsam? (1p)  
 Reducerad kostnad är 17,6825. Vinsten måste öka med åtminstone det, till 87,6825.
- b) Hur förändras målfunktionsvärdet om åtgången av råvara  $R_2$  för produktion av produkt 1 ökar från 2 till 3 enheter? (1p)  
 79,2354 enheter av produkt 1 tillverkas i optimallösningen. Alltså kommer 79,2345 ytterligare enheter av råvara  $R_2$  behövas. Det ger inte upphov till någon förändring, då det finns 130,495 enheter slack för råvaran.
- c) Maskin B måste repareras och får en sänkt kapacitet till 30 tillgängliga timmar. Hur påverkas målfunktionsvärdet? (1p)  
 30 ligger utanför intervallet för maskin B. Det är en restriktion av ett max-problem, målfunktionsvärdet kommer att minska. Dock vet vi inte med hur mycket utan en reoptimering.
- d) Ett annat företag erbjuder att förse företaget med 600 enheter av råvara  $R_4$ , till en kostnad av 5000 kr. Bör företaget anta erbjudandet? (2p)  
 Ja, erbjudandet bör antas. Vi vet att målfunktionsvärdet kommer att öka med *minst*  $524,72 \cdot 9,92615 = 5208,45$  kr och *mest*  $600 \cdot 9,92615 = 5955,69$  kr.

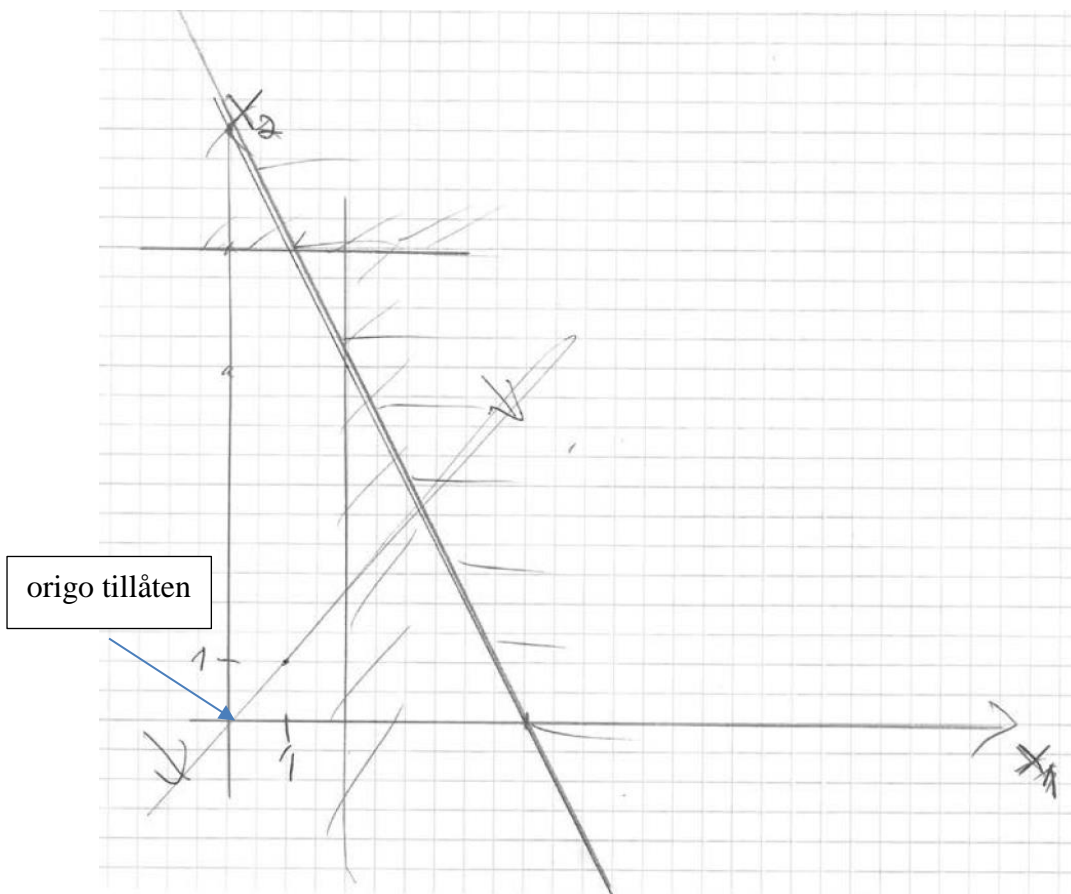
### (5p) Uppgift 3

Betrakta följande optimeringsproblem

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 - x_2 \\ \text{då} \quad 2x_1 + x_2 &\leq 10 \quad (1) \\ x_1 &\leq 2 \quad (2) \\ x_2 &\leq 8 \quad (3) \end{aligned}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Besvara följande påståenden med sant eller falsk, samt motivering till varför. Varje korrekt motiverat svar ger 1p. *Tips: Illustrera problemet grafiskt, och utgå ifrån illustrationen för att motivera dina svar.*



- a) Origo ( $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ) utgör en tillåten lösning till problemet

*Sant, se skiss.*

- b) Problemet har fyra tillåtna baslösningar

*Falskt, i figuren ovan kan man räkna till fem tillåtna baslösningar (hörnpunkter)*

- c) Problemet har en unik optimallösning

*Sant, vid grafisk lösning erhålls punkten (2,0) som enda optimallösning*

- d) Punkten  $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  är en optimallösning till problemet

*Falskt, vid grafisk lösning erhålls punkten (2,0) som enda optimallösning*

- e) Om vi byter ut målfunktionen till

$$z = c_1x_1 + c_2x_2$$

så har problemet minst en heltalig optimallösning oavsett vilka värden som sätts in på  $c_1$  och  $c_2$

*Sant, samtliga tillåtna baslösningar är heltaliga, därmed kommer alltid minst en optimallösning att vara heltalig.*

### (5p) Uppgift 4

Betrakta följande optimeringsproblem

$$\min z = 2x_1 + x_2 - 4x_3$$

$$\text{då} \quad -2x_1 \quad + 2x_3 \leq 10$$

$$x_1 - x_2 + x_3 \leq 8$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

- a) Skriv om problemet på standardform och ställ upp en initial simplextablå med punkten  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  som baslösning. (1p)
- b) Gör en iteration med simplexmetoden, dvs. bestäm inkommande och utgående basvariabler samt uppdatera tablån med nya värden. (3p)
- c) Bestäm aktuellt målfunktionsvärde för den nya lösningen och avgör om lösningen är optimal. (1p)

*Standardform med  $x_4$  och  $x_5$  som slackvariabler.*

|        |             |         |             |         |         |          |
|--------|-------------|---------|-------------|---------|---------|----------|
| $z =$  | $2.0 x_1$   | $+ x_2$ | $- 4.0 x_3$ |         |         |          |
| $s.t.$ | $- 2.0 x_1$ |         | $+ 2.0 x_3$ | $+ x_4$ | $=$     | $10.0$   |
|        | $x_1$       | $- x_2$ | $+ x_3$     |         | $+ x_5$ | $= 8.0$  |
|        | $x_1,$      | $x_2,$  | $x_3,$      | $x_4,$  | $x_5$   | $\geq 0$ |

Initial tablå

| Bas | z | x1     | x2     | x3    | x4 | x5 | b      |
|-----|---|--------|--------|-------|----|----|--------|
| z   | 1 | -2.000 | -1.000 | 4.000 | 0  | 0  | 0      |
| x4  | 0 | -2.000 | 0      | 2.000 | 1  | 0  | 10.000 |
| x5  | 0 | 1      | -1.000 | 1     | 0  | 1  | 8.000  |

Inkommande x3, utgående x4

Ny tablå

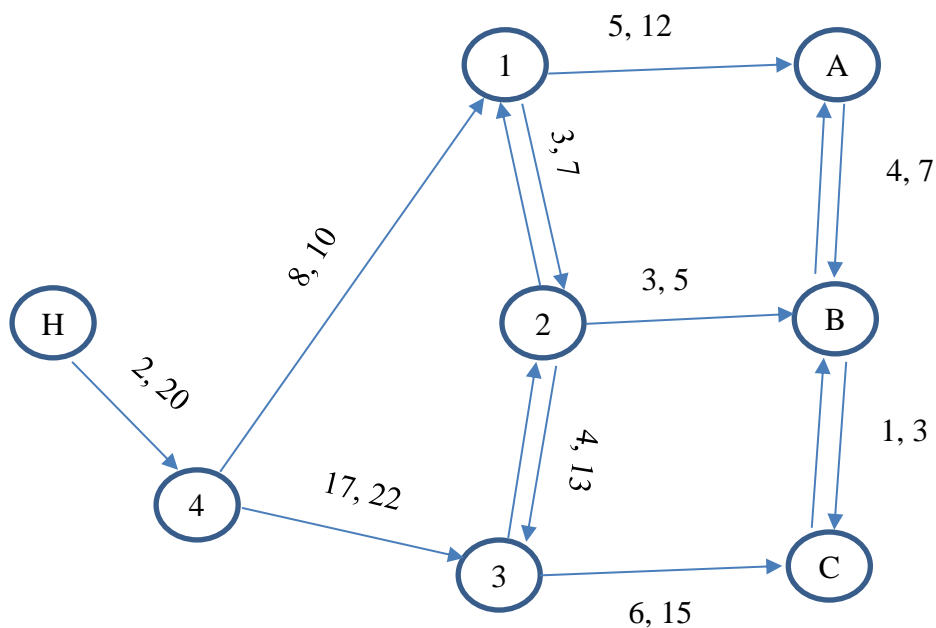
| Bas | z | x1     | x2     | x3 | x4     | x5 | b       |
|-----|---|--------|--------|----|--------|----|---------|
| z   | 1 | 2.000  | -1.000 | 0  | -2.000 | 0  | -20.000 |
| x3  | 0 | -1.000 | 0      | 1  | 0.500  | 0  | 5.000   |
| x5  | 0 | 2.000  | -1.000 | 0  | -0.500 | 1  | 3.000   |

Aktuellt målfunktionsvärde: -20

Lösningen ej optimal ty red. kost. för x1 är negativ.

**(5p) Uppgift 5**

Betrakta följande nätverk som illustrerar ett kanalsystem. Noden markerad med "H" är en hamn där omlastning sker från större fartyg för vidare transport till slutdestination uppströms. Övriga noder markerade med bokstäver är platser är destinationer för transporter på kanalerna. Numrerade noder är endast punkter där kanalen delas. På varje båge finns kanalsektionens längd (i km) samt maximal höjd (i meter) på fartyg som kan passera under broarna som finns på sektionen. Den första siffran är längd och den andra siffran är höjd, på varje båge. Notera att på vissa sektioner är endast enkelriktad fartygstrafik tillåten, men där dubbelriktad trafik är tillåten är längd och höjd samma för båda riktningar.

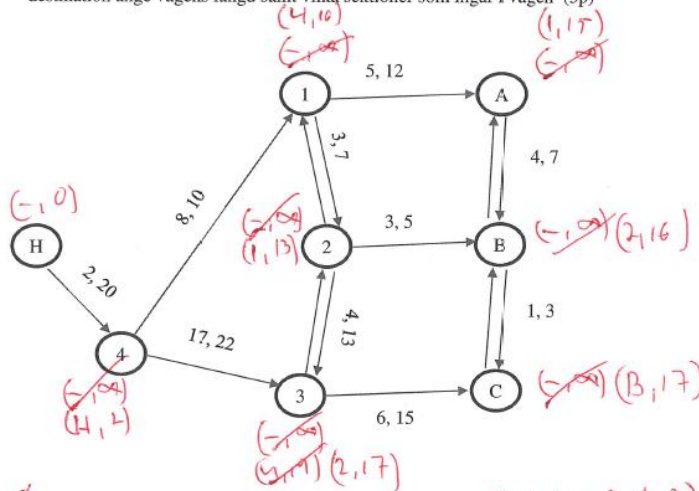


Din uppgift är att utifrån metoder presenterade på kursen

- a) bestämma den kortaste vägen från hamnen (H) till samtliga destinationer, för varje destination ange vägens längd samt vilka sektioner som ingår i vägen (3p)

Din uppgift är att utifrån metoder presenterade på kursen

- a) bestämma den kortaste vägen från hamnen (H) till samtliga destinationer, för varje destination ange vägens längd samt vilka sektioner som ingår i vägen (3p)

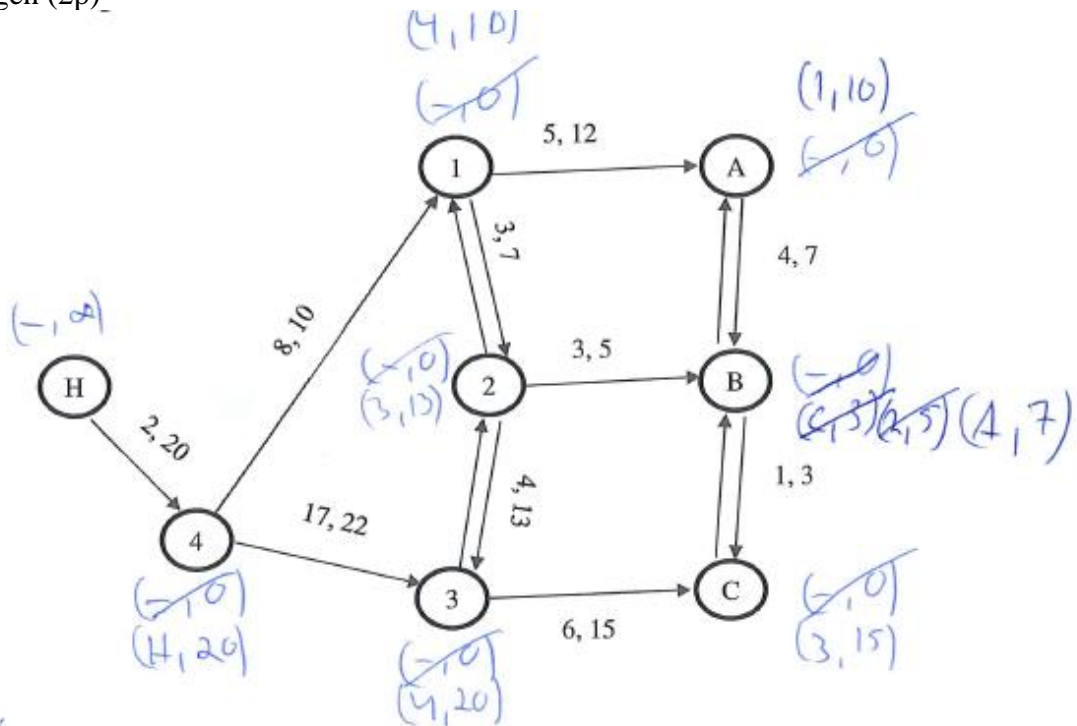


$A = \emptyset$   
 $D = \{A, B, C, 1, 2, 3, 4\}$   
 $A = \{H\}$  (När 4 uppdateras)  
 $D = \{A, B, C, 1, 2, 3, 4\}$   
 $A = \{4, 4\}$  (När 1 och 3 uppdateras)  
 $D = \{A, B, C, 1, 2, 3\}$   
 $A = \{4, 1, 1\}$  (När 2 och A uppdateras)  
 $D = \{A, B, C, 2, 3\}$   
 $A = \{4, 1, 1, 2\}$  (När 3 och B uppdateras)  
 $D = \{A, B, C, 3\}$   
 $A = \{4, 1, 1, 1, A\}$  (När ingen nod uppdateras)  
 $D = \{B, C, 3\}$

$A = \{H, 4, 1, 2, A, B\}$   
 $D = \{C, 3\}$  (När C uppdateras)  
 $A = \{H, 4, 1, 1, A, B, 3\}$   
 $D = \{C\}$  (När C uppdateras)  
 $A = \{H, 4, 1, 1, 1, A, B, 3, 3\}$   
 $D = \emptyset$  (Klar)  
 $H \rightarrow A: H - 4 - 1 - A, 15$   
 $H \rightarrow B: H - 4 - 1 - 2 - B, 16$   
 $H \rightarrow C: H - 4 - 1 - 2 - B - C, 17$



- b) bestämma den maximala fartygshöjden som kan nå fram till varje destinationsnod från hamnen (H), för varje destination ange fartygshöjd samt vilka sektioner som ingår i vägen (2p)



$A = \emptyset$   
 $D = (A, B, C, 1, 2, 3, 4)$   


---

 $A = (H)$  *uppdaterad nod 4*  
 $D = (A, B, C, 1, 2, 3, 4)$   


---

 $A = (H, 4)$  *uppdaterad nod 1 och 3*  
 $D = (A, B, C, 1, 2, 3)$   


---

 $A = (H, 4, 3)$  *uppdaterad nod 2 och C*  
 $D = (A, B, C, 1, 2)$   


---

 $A = (H, 4, 3, C)$  *uppdaterad nod B*  
 $D = (A, B, 1, 2)$   


---

 $A = (H, 4, 3, C, 2)$   
 $D = (A, B, 1)$  *uppdaterad nod B*

$A = (H, 4, 3, C, 2, 1)$   
 $D = (A, B)$  *uppdaterad nod A*  


---

 $A = (H, 4, 3, C, 2, 1, A)$   
 $D = (B)$  *uppdaterad nod B*  


---

 $A = (H, 4, 3, C, 2, 1, A, B)$   
 $D = \emptyset$  *stopp*  


---

 $H \rightarrow A: H-4-1-A: 10$   
 $H \rightarrow B: H-4-1-A-B: 7$   
 $H \rightarrow C: H-4-3-C: 15$