Analys III, TNA006

1. (a) Det är en nivåyta, låt $F(x,y,z) = xyz + z^3$ då är ∇F en normalvektor,

$$\nabla F = (yz, xz, xy + 3z^2), \quad \nabla F(3,2,1) = (2,3,9)$$

Tangentplanet är

$$2(x-3) + 3(y-2) + 9(z-1) = 0.$$

(b) Det är en funktionsyta låt $f(x,y) = x^2y^3$, vi har att $f(1,-1) = -1$

$$f'_x = 2xy^3, \quad f'_x(1,-1) = -2, \quad f'_y = 3x^2y^2, \quad f'_y(1,-1) = 3.$$

Tangantplanet är

$$z = -1 - 2(x-1) + 3(y+1)$$

2. Söker stationära punkter:

$$\begin{cases} f'_x &= 3x^2 + 6xy = 3x(x+2y) \\ f'_y &= 3y^2 + 3x^2 - 15 \end{cases}$$

Att $\nabla f = 0$ ger att $x = 0$ eller $x + 2y = 0$. $x = 0$: vi får att $y^2 = 5$
$x = -2y$ ger att $5y^2 = 5$

Vi har stationära punkter $\pm(0, \sqrt{5})$, $(-2, 1)$ och $(2, -1)$.

För att undersöka om lokala max/min ser vi på andraderivatorna:

$$\begin{cases} f''_{xx} &= 6x + 6y \\ f''_{xy} &= 6x \\ f''_{yy} &= 6y \end{cases}$$

Den kvadratiska formen blir då:

$(0, \sqrt{5})$

$$Q(h,k) = 6\sqrt{5}h^2 + 6\sqrt{5}k^2$$

Vilket är en positivt definit kvadratisk form.

$(0, -\sqrt{5})$

$$Q(h,k) = -6\sqrt{5}h^2 - 6\sqrt{5}k^2$$

Vilket är en negativt definit kvadratisk form.

$(-2, 1)$

$$Q(h, k) = -6h^2 - 24hk + 6k^2 = 6\big(-(h-2k)^2 + 5k^2\big)$$

Vilket är en indefinit kvadratisk form.

$(2, -1)$

$$Q(h, k) = 6h^2 + 24hk - 6k^2 = 6\big((h+2k)^2 - 10k^2\big)$$

Vilket är en indefinit kvadratisk form.

Svar: Punkten $(0, \sqrt{5})$ är en lokal minimipunkt. Punkten $(0, -\sqrt{5})$ är en lokal maximipunkt. f har också två sadelpunkter.

3. Vi byter till elliptiska koordinater,

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= \frac{r}{2}\sin\theta \end{cases} \quad E = \{(r, \theta) : 0 < r < 1, 0 \leq \theta < 2\pi\}, \quad \frac{d(x, y)}{d(r, \theta)} = \frac{r}{2}.$$

$$\iint_D x^2 e^{x^2+4y^2} dxdy = \iint_E r^2 \cos^2\theta e^{r^2} \frac{r}{2} drd\theta =$$
$$\frac{1}{2}\iint_E \cos^2\theta r^3 e^{r^2} drd\theta =$$
$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta \int_0^1 r^3 e^{r^2} dr =$$

I den första integralen använder vi oss av trigonometriska formler, i den andra ett variabelbyte $t = r^2$.

$$\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2\theta)}{2} d\theta \int_0^1 te^t dt = \cdots = \frac{1}{4}(\frac{2\pi}{2}) = \frac{\pi}{4}$$

4. Vi söker max/min på en kompakt mängd och funktionen f är kontinuerlig, alltså vet vi att max/min antas.

Stationära punkter:

$$\begin{cases} f'_x &= yz \\ f'_y &= xz \\ f'_z &= xy \end{cases}$$

Vi ser att ekvationerna ger att stationära punkter får vi då minst två av variablerna är noll. I alla dessa punkter blir f också noll.

Singulära punkter: Saknas då ∇f är definierad i $\mathbb{R}^3$.

Randen: Här är $x^2+y^2+z^2=3$, låt $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-3$. Vi skall alltså hitta max/min till f då $g(x,y,z)=0$. Använder Lagranges multiplikatormetod, och löser $\nabla f=\lambda\nabla g$:

$$\begin{cases} yz &= 2\lambda x \\ xz &= 2\lambda y \\ xy &= 2\lambda z \end{cases}$$

Vi kan lösa ut λ ur sista ekvationen $2\lambda=\frac{xy}{z}$ detta ger oss:

$$\begin{cases} yz &= \frac{x^2y}{z} \\ xz &= \frac{xy^2}{z} \end{cases} \iff \begin{cases} z^2 &= x^2 \\ z^2 &= y^2 \end{cases}$$

Bivillkoret ger oss då att $3x^2=3$ och alltså $x=\pm1$. Det ger oss punkter $(\pm1,\pm1,\pm1)$.

De andra möjligheter att $\nabla g=\mathbf{0}$ ger punkten $(0,0,0)$ som ej på randen. Gradienterna är också definierade i hela $\mathbb{R}^3$. Och sfären har inga ändpunkter.

Funktionsvärden i de intressanta punkterna är alltså:

$$f(x,0,0)=f(0,y,0)=f(0,0,z)=0 \text{ stationära punkter}$$

$$f(-1,1,1)=f(1,-1,1)=f(1,1,-1)=f(-1,-1,-1)=-1$$

$$f(1,1,1)=f(-1,-1,1)=f(-1,1,-1)=f(1,-1,-1)=1$$

Svar: Största värdet är 1, minsta värdet är -1

5. Tetraederns sidor ligger i koordinatplanen, planet $z=1$ och planet $x+y-z=0$.

$$\iiint_D yz\,dxdydz=\iint_{D_1}\left(\int_{x+y}^1 yz\,dz\right)dxdy=$$

Där D_1 är triangeln i xy-planet med hörn i $(0,0)$, $(1,0)$ och $(0,1)$,

$$\iint_{D_1}\left[\frac{1}{2}yz^2\right]_{x+y}^1 dxdy=\frac{1}{2}\iint_{D_1}\left(y-y(x+y)^2\right)dxdy=$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1\left(\int_0^{1-y} y-y(x+y)^2dx\right)dy=\frac{1}{2}\int_0^1\left[xy-\frac{1}{3}y(x+y)^3\right]_0^{1-y}dy=$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1\left((1-y)y-\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}y^4\right)dy=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{2}{3}y-y^2+\frac{1}{3}y^4\right)dy=$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}y^2-\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{15}y^5\right]_0^1=\frac{1}{30}$$

6. Låt $F(x,y,z) = (1+x^2+y)z^5 + e^{x+y}z$. Det gäller att $F(0,0,1) = 2$.

$$F'_z = 5(1+x^2+y)z^4 + e^{x+y}, \quad F'_z(0,0,1) = 6$$

Då $F'_z(0,0,1) \neq 0$ så finns en sådan funktion $z(x,y)$ i en omgivning av punkten $(0,0,1)$. För att bestämma Taylorutvecklingen deriverar vi ekvationen implicit:

z'_x

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big((1+x^2+y)z^5 + e^{x+y}z\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(2\Big) \iff$$

$$2xz^5 + 5(1+x^2+y)z^4 z'_x + e^{x+y}z + e^{x+y}z'_x = 0$$

I punkten $(0,0,1)$:

$$5z'_x(0,0) + 1 + z'_x(0,0) = 0, \quad \Rightarrow \quad z'_x(0,0) = -\frac{1}{6}$$

z'_y Derivera uttrycket ovan en gån till m.a.p. x

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big((1+x^2+y)z^5 + e^{x+y}z\Big) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(2\Big) \iff$$

$$z^5 + 5(1+x^2+y)z^4 z'_y + e^{x+y}z + e^{x+y}z'_y = 0$$

I punkten $(0,0,1)$:

$$1 + 5z'_y(0,0) + 1 + z'_y(0,0) = 0, \quad \Rightarrow \quad z'_y(0,0) = -\frac{1}{3}$$

Vi vet också att $z(0,0) = 1$, Taylorutvecklingen är

Svar: Det finns en sådan funktion $z(x,y)$ och Taylorutvecklingen är $1 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{3}y$.

7. Kedjeregeln ger:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = z'_u + z'_v$$

$$\frac{\partial z'_x}{\partial x} = \frac{\partial z'_u}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z'_u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z'_v}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z'_v}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} =$$

$$z''_{uu} + 2z''_{uv} + z''_{vv}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\sqrt{y}}z'_u + \frac{1}{\sqrt{y}}z'_v$$

$$\frac{\partial z'_y}{\partial y} = -\frac{1}{\sqrt{y}}\left(\frac{\partial z'_u}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z'_u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{1}{\sqrt{y}}\left(\frac{\partial z'_v}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z'_v}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{1}{2y\sqrt{y}}z'_u-\frac{1}{2y\sqrt{y}}z'_v =$$

$$\frac{1}{y}z''_{uu} - \frac{2}{y}z''_{uv} + \frac{1}{y}z''_{vv} + \frac{1}{2y\sqrt{y}}z'_u - \frac{1}{2y\sqrt{y}}z'_v$$

Det ger oss i PDEn

$$z''_{xx} - yz''_{yy} - \frac{1}{2}z'_y =$$

$$z''_{uu}+2z''_{uv}+z''_{vv}-y\left(\frac{1}{y}z''_{uu}-\frac{2}{y}z''_{uv}+\frac{1}{y}z''_{vv}+\frac{1}{2y\sqrt{y}}z'_u-\frac{1}{2y\sqrt{y}}z'_v\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{y}}z'_u+\frac{1}{\sqrt{y}}z'_v\right) =$$

$$= 4z''_{uv} = 0.$$

Vilket ger att $z'_u = g(u)$ och $z = G(u) + f(v)$. Byt tillbaks till x, y ger

Svar: Lösningen är $z = g(x - 2\sqrt{y}) + h(x + 2\sqrt{y})$, där g och h är två godtyckliga funktioner i $\mathcal{C}^2$