# Tentamen
# TNA001 – Matematisk grundkurs

| | |
|---|---|
| Datum: | 2014-08-27 |
| Tid: | 08.00 – 13.00 |
| Kurskod: | TNA001 |
| Provkod: | TEN1 |
| Institution: | ITN |
| Examinator: | Sixten Nilsson |
| Hjälpmedel: | Inga, förutom skriv- och ritmateriel |

**Bedömningsgrunder och beskrivning av vad som menas med en fullständig lösning**

Uppgifterna på denna tentamen bedöms genom att varje uppgift poängsätts med 0 - 6 poäng. Om inte annat framgår av texten, skall **fullständig lösning** lämnas. Med detta menas att följande moment skall i *lämplig omfattning* ingå i lösningen:

1. Lösningen skall ha förklarande text med förklaringar på vad som görs och varför det får göras. En hänvisning till teorin kan här vara lämpligt. Även en figur kan vara ett bra stöd i detta arbete.
2. Lösningen skall ha en struktur som är lätt att följa.
3. Lösningen skall innehålla en kalkyldel där det går att följa hur resultaten har uppkommit.
4. Lösningen skall ha ett tydligt angivet svar/resultat som är kopplat till den fråga som är ställd.
5. Svaret/resultatet skall där så är lämpligt utvärderas, dvs. prövningar skall genomföras som säkrar resultatet

Poängsättningen vid rättningen tar hänsyn till hur väl samtliga delar ovan är genomförda.

**Betyg**

| Betyg | Poäng på tentamen (inklusive bonuspoäng) |
|---|---|
| 5 | $\geq 36$ , varav minst 2p på var och en av de fem första uppgifterna |
| 4 | 28 – 35, varav minst 2p på var och en av de fem första uppgifterna |
| 3 | 20 – 27, varav minst 2p på var och en av de fem första uppgifterna |
| U | 0 – 19 |

Lösningsskisser kommer att finnas på kurshemsidan http://webstaff.itn.liu.se/~sixni/TNA001.htm i samband med tentamenstidens slut.

1. a) Vilka reella tal $x$ uppfyller villkoret

$$\frac{x-3}{x} \leq \frac{1}{x-4}?$$

b) Lös ekvationen $|3x-1| = x + |x-4|$.

2. I en ON-bas går linjen $L$ genom punkterna $(4, -2, -2)$ och $(2, -1, -2)$.
a) Bestäm en ekvation för linjen $L$.
b) Bestäm skärningspunkten mellan linjen $L$ och planet $x + y + 2z = 1$.
c) Avgör om linjen $L$ skär den linje som har ekvationen $(x, y, z) = (1, -2, 0) + s(1, 2, -1)$. Bestäm i så fall skärningspunktens koordinater.

3. a) Visa att sambanden A, B och C gäller för alla godtyckliga komplexa tal $z_1$ och $z_2$.
A. $z_1 + \overline{z_1} = 2\,\mathrm{Re}\, z_1$ B. $z_2 \cdot \overline{z_2} = |z_2|^2$ C. $\mathrm{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}) \leq |z_1 \cdot \overline{z_2}|$

b) Beräkna $z^{50}$ om $z = 2 + \frac{2-2i}{1+i}$. Ange svaret på formen $a + bi, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$.

4. a) Beskriv vad som menas med en aritmetisk respektive geometrisk summa.
b) Beräkna, uttryckt i $n$ och utan summasymbol, summan av de $n$ första udda heltalen.

5. Låt $f(x) = \arcsin(2x-1)$.
a) Bestäm $f$:s definitionsmängd, $D_f$.
b) Bestäm inversen $f^{-1}$ till $f$ inklusive inversens definitionsmängd $D_{f^{-1}}$.
c) Det gäller att ekvationen $f(x) = f^{-1}(x)$ har en enda lösning $x = x_0$, och detta behöver du *inte* motivera/visa. Visa däremot att $\frac{1}{2} < x_0 < 1$.

6. I en ON-bas har linjen $L$ ekvationen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ och punkten $P = (2,2,1)$. Låt $S$ vara $P$:s spegling i linjen. Bestäm koordinaterna för $S$.

7. Visa att det för alla reella $x$ gäller att

$$x^n - 1 = (x-1) \cdot \sum_{k=1}^{n} x^{n-k}$$

för alla $n \in \mathbb{Z}^+$.
Anm: Vi låter här $x^0 = 1$ för alla $x$, d.v.s. även för $x = 0$.