

Statistik och sannolikhetslära, TNIU66

Tentamen, 24 augusti 2024, Svar och lösningsskisser

Nedanstående är svar, med viss diskussion och antydningar till hur uppgifterna *kan* lösas. Det är *inte* nödvändigtvis fullständiga lösningar.

- (a) Ses direkt i tabellen att kvinnorna har högst medellön på varje avdelning.
(b) Medellön = total lön / antal individer. Kvinnor: $(22 \cdot 26 + 34 \cdot 28 + 14 \cdot 38 + 9 \cdot 46) / (22 + 34 + 14 + 9) = 2470 / 79 = 31,3$ kkr. (c) Män: 33,8 kkr.
- (a) Sannolikheter är areor. $\Pr(X \leq a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx = \int_0^a x^3/4 dx = a^4/16$. Ekvationen $\Pr(X \leq a) = 3/4$ blir $a^4/16 = 3/4$ där endast den positiva lösningen duger. $a = \sqrt[4]{12} \approx 1,8612$.
(b) $\Pr(X \geq 1 \mid X \leq 3/2) = \Pr(1 \leq X \leq 3/2) / \Pr(X \leq 3/2) = (1,5^4 - 1^4) / 1,5^4 = (3^4 - 2^4) / 3^4 = 65/81 \approx 0,8025$.
- Låt X vara antalet rätta svar Sreymean presterar. Då gäller $X \sim \text{Bin}(n = 6, \pi = 0,75)$.
(a) $\Pr(X = 6) = \binom{6}{6} 0,75^6 = 729/4096 \approx 0,178$.
(b) $\Pr(\text{noll poäng}) = \Pr(X \leq 3) = 1 - \Pr(X \geq 4) = 1 - (P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6)) = 1 - (\binom{6}{4} 0,75^4 (1 - 0,75)^{6-4} + \binom{6}{5} 0,75^5 (1 - 0,75)^{6-5} + \binom{6}{6} 0,75^6 (1 - 0,75)^{6-0}) = 679/4096 \approx 0,166$.
- Med slumpvariabeln $X = \text{antal födda flickor}$ blir estimatorn $P = X/n$ binomialfördelad och dess medelfel kan uppskattas till $\text{SE}(P) = \sqrt{p(1-p)/n}$. Eftersom $np(1-p) \approx 42,8 > 5$ ges konfidensintervallet approximativt av uttrycket

$$\left[p + z_{0,05/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + z_{1-0,05/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right],$$

vilket här blir $[0,391, 0,540]$. Samma svar i (a) som i (b) populationens storlek påverkar inte om den är tillräckligt stor, tumregel om stickprovet är mindre än 10% av populationen, vilket är uppfyllt med marginal i bägge fallen här.

- (a) Falskt. Vanligt missförstånd.
(b) Falskt. Mer ovanligt missförstånd.
(c) Falskt.
(d) Falskt. Större stickprov *minskar* längden av konfidensintervallet.
(e) Falskt. Typisk konfidensnivå är 95%. Fördubbla?
(f) Falskt. Enkelsidiga intervall saknar begränsning åt ett håll, dvs bredden är oändlig.

6. (a) Medelökningen per enhet på x -axeln, dvs per rum, ges av riktningskoefficienten, 618 kr/rum.
 (b) Prognosintervall för förväntad månadsavgift för en trerumslägenhet ges av

$$\left[b_0 + b_1x + t_{\alpha/2;n-2}s\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \left(\frac{(x - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}\right)^2}, b_0 + b_1x + t_{1-\alpha/2;n-2}s\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \left(\frac{(x - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}\right)^2} \right].$$

Med värden ur utdatasammanfattningen, $b_0 = 955$, $b_1 = 618$, $s = 352,98$, $n = 8$. Direkt räkning $\bar{x} = 2,5$ och $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 10$. Ur tabell $t_{1-0,05/2;n-2} = 2,447$ erhålles intervallet $[1835, 3783]$. Detta innebär att med 95% sannolikhet täcker detta intervall månadsavgiften för en trerumslägenhet.