TSKS21 Signaler, information & bilder

Föreläsning 6

Signaler och system – frekvensdomänen, fourierserier och fouriertransformer

Mikael Olofsson
Institutionen för Systemteknik (ISY)
Ämnesområdet Kommunikationssystem

LINKÖPINGS UNIVERSITET

Sinus in – sinus ut - principen

För LTI-system har vi:

Sinus in – Sinus ut (samma frekvens)

Jämför med partikulärlösningen av en differentialekvation.

Också: $j\omega$-metoden.

Linjäritet implicerar:

$\sum$ Sinus in – $\sum$ Sinus ut

Önskvärt:

Beskriv signaler i termer av sinussignaler.

Beskriv system i termer av vad de gör med sinussignaler.

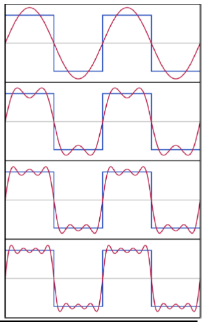
Detta tar oss till: Fourierserier och Fouriertransformer

Tidskontinuerliga fourierserier

Jean Baptiste Joseph Fourier
1768 – 1830

Krav på signalen $x(t)$:

1. Periodisk, period T.
2. Absolutintegrerbar: $\int_0^T |x(t)|\, dt < \infty$
3. Ett ändligt antal lokala min & max i en period.
4. Ett ändligt antal diskontinuiteter i en period.



Då existerar a_0, a_n, b_n för $n \in \{1, 2, \ldots, \infty\}$ så att

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)\right)}_{\text{Ton nummer } n.}$$

gäller för $\omega_0 = 2\pi/T$.

Komplexa fourierseriekoefficienter

Euler: $\cos(knt) = \dfrac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2}$ $\qquad (n\omega_0 t) = \dfrac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{j2}$

Resultat: $x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega_0 t) + b_k \sin(n\omega_0 t)\right)$

$$= \underbrace{a_0}_{D_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\underbrace{\frac{a_n - jb_n}{2}}_{D_n} e^{jn\omega_0 t} + \underbrace{\frac{a_n + jb_n}{2}}_{D_{-n}} e^{-jn\omega_0 t} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

Samband: $D_{-n} = D_n^*, \quad \forall\, n$

Amplitudspektrum: $|D_n|$ $\qquad$ Fasspektrum: $\arg\{D_n\}$

Att bestämma D_n

Betrakta:

$$\int_0^T x(t)\ e^{-jn\omega_0 t}dt = \int_0^T \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_m e^{jm\omega_0 t}\, e^{-jn\omega_0 t}dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_m \underbrace{\int_0^T e^{j(m-n)\omega_0 t}dt}_{=\begin{cases}0, & m\neq n\\ T, & m=n\end{cases}} = TD_n$$

Alltså:

$$D_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\ e^{-jn\omega_0 t}dt$$

Men också:

$$D_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\ e^{-jn\omega_0 t}dt$$

Anledning:

$$x(t+T) = x(t) \qquad \omega_0 = 2\pi/T$$

$$e^{-jn\omega_0(t+T)} = e^{-jn(\omega_0 t+2\pi)} = e^{-jn\omega_0 t}$$

Egenskaper hos fourierserieutveckling

Låt $x(t)$ och $y(t)$ vara periodiska signaler med period T och fourierseriekoefficienter C_n respektive D_n.

Signal	Fourierseriekoefficient # n
$ax(t)+by(t)$	$aC_n + bD_n$
$x(t-\tau)$	$C_n e^{-jn\omega_0\tau}$
$x(at)$	C_n (period T/a)
$\frac{d}{dt}x(t)$	$jn\omega_0 C_n$

Sinus in – sinus ut - principen (fourierserier)

För LTI-system har vi:

Sinus in – Sinus ut (samma frekvens)

Jämför med partikulärlösningen av en differentialekvation.

Också: $j\omega$-metoden.

Linjäritet implicerar:

Σ Sinus in – Σ Sinus ut

Alltså:

Beskriv periodiska signaler med fourierserieutveckling.

Lös problemet för varje sinusterm (komplex exponentialterm).

Linjäritet: Addera resultaten.

Tidskontinuerlig fouriertransform

Krav på signalen $x(t)$:

- Absolutintegrerbar: $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt < \infty$
- Ändligt antal diskontinuiteter.
- Begränsad variation: $\int_{-\infty}^{\infty} |x'(t)|\, dt < \infty$

Transform:

$$X(\omega) = \mathscr{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}dt$$

Inverse transform:

$$x(t) = \mathscr{F}^{-1}\{X(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}d\omega$$

- Spektrum av $x(t)$: $X(\omega)$
- Amplitudspektrum: $|X(\omega)|$
- Fasspektrum: $\arg\{X(\omega)\}$

Utsignal från ett LTI-system

Notation: $A(\omega) = \mathscr{F}\{a(t)\}$ $\qquad B(\omega) = \mathscr{F}\{b(t)\}$

Egenskap: $\mathscr{F}\{(a*b)(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} (a*b)(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} a(\tau) b(t-\tau)\, d\tau\, e^{-j\omega t}\, dt$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} a(\tau) b(t-\tau) e^{-j\omega t}\, d\tau\, dt = \Big/ \begin{matrix} \lambda = t - \tau \\ d\lambda = dt \end{matrix} \Big/ = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} a(\tau) b(\lambda) e^{-j\omega(\tau+\lambda)}\, d\tau\, d\lambda$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} a(\tau) e^{-j\omega\tau}\, d\tau \int_{-\infty}^{\infty} b(\lambda) e^{-j\omega\lambda}\, d\lambda = A(\omega) B(\omega)$$

LTI-system:

$$\begin{matrix} x(t) \\ X(\omega) \end{matrix} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} h(t) \\ H(\omega) \end{matrix}} \longrightarrow \begin{matrix} y(t) = (x*h)(t) \\ Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) \end{matrix}$$

Mikael Olofsson
ISY/KS

www.liu.se