Svar till kontrollskrivning i TNA006, 20140930

1. (a) Vi har

$$\nabla f = (2xy + y,\, x^2 + x), \quad \nabla f(-1,1) = (-1,0)$$

Riktningsderivatan är

$$\nabla f(-1,1) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2) = (-1,0) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Svar: Riktningsderivatan är $-\frac{1}{\sqrt{5}}$

(b) Funktionen växer snabbast i riktningen $\nabla f(2,1) = (5,6)$ och den växer med hastigheten $|\nabla f(2,1)| = |(5,6)| = \sqrt{61}$.

2. Stationära punkter får vi ur $\nabla f = \mathbf{0}$:

$$\begin{cases} f'_x &= 2x + y = 0 \\ f'_y &= x + 3y^2 - 2y = 0 \end{cases}$$

Vi ser att $y = -2x$ detta ger i andra ekvationen att $12x^2 + 5x = x(12x+5) = 0$ som ger oss $x = 0$ eller $x = -\frac{5}{12}$. Vi får två stationära punkter, $(0,0)$ och $(-\frac{5}{12}, \frac{5}{6})$.

För att avgöra karaktären, så ser vi på den kvadratiska formen, $Q(h,k)$:
Andraderivator:

$$\begin{cases} f''_{xx} &= 2 \\ f''_{xy} &= 1 \\ f''_{yy} &= 6y - 2 \end{cases}$$

I punkten $(0,0)$:

$$Q(h,k) = 2h^2 + 2hk - 2k^2 = 2\left((h + \frac{1}{2}k)^2 - \frac{5}{4}k^2\right)$$

Detta är en indefinit kvadratisk form, således är $(0,0)$ en sadelpunkt.

I punkten $(-\frac{5}{12}, \frac{5}{6})$:

$$Q(h,k) = 2h^2 + 2hk + 3k^2 = 2\left((h + \frac{1}{2}k)^2 + \frac{5}{4}k^2\right)$$

Detta är en positivt definit kvadratisk form, således är $(-\frac{5}{12}, \frac{5}{6})$ ett lokalt minimum.

Svar: Två stationära punkter, $(0,0)$ en sadelpunkt och $(-\frac{5}{12}, \frac{5}{6})$ ett lokalt minimum.

3. Bestäm alla $\mathcal{C}^1$-funktioner $z(x,y)$ som uppfyller den partiella differentialekvationen

$$x^2 z'_x - z'_y = 0, \quad x > 0.$$

med hjälp av variabelbytet

$$u = x, \quad v = \frac{1}{x} - y.$$

Med kedjeregeln får vi att

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = z'_u - \frac{1}{x^2} z'_v$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = -z'_v$$

Detta ger i den partiella differentialekvationen att

$$x^2 z'_x - z'_y = x^2\left(z'_u - \frac{1}{x^2} z'_v\right) - \left(-z'_v\right) = x^2 z'_u = 0$$

Vi får alltså en ekvation $x^2 z'_u = 0$ eller då $x > 0$ att $z'_u = 0$. Lösningar är alltså $z = g(v)$. Återstår att gå tillbaka till x och y.

Svar: Lösningar är $z(x,y) = g(\frac{1}{x} - y)$ där g är en godtycklig deriverbar funktion.

4. Avgör om det i en omgivning till punkten $(0,0,0)$ finns en funktion $z(x,y)$ som satisfierar ekvationen

$$x^3 + y^3 + z^3 + x^2 z - yz - z = 0$$

Om en sådan funktion finns, bestäm $z(0,0)$, $z'_x(0,0)$ och $z'_y(0,0)$.

Låt $F(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + x^2 z - yz - z$, då är $F'_z = 3z^2 + x^2 - y - 1$ och $F'_z(0,0,0) = -1 \neq 0$ alltså finns det en sådan funktion i en omgivning av $(0,0,0)$ (vi har också att $F(0,0,0) = 0$). Vi ser också att $z(0,0) = 0$. För att bestämma derivatorna deriverar vi implicit.

M.a.p. x med $z(x,y)$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^3 + y^3 + z^3 + x^2 z - yz - z\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(0\right)$$

Vilket blir

$$3x^2 + 3z^2 z'_x + 2xz + x^2 z'_x - y z'_x - z'_x = 0$$

I punkten $(0,0,0)$ blir det

$$-z'_x(0,0) = 0$$

Vi har $z'_x(0,0) = 0$.

M.a.p. y med $z(x,y)$:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^3 + y^3 + z^3 + x^2 z - yz - z\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(0\right)$$

Vilket blir

$$3y^2 + 3z^2 z'_y + x^2 z'_y - z - yz'_y - z'_y = 0$$

I punkten $(0,0,0)$ blir det

$$-z'_y(0,0) = 0$$

Vi har $z'_y(0,0) = 0$. **Svar:** $z(0,0) = 0$, $z'_x(0,0) = 0$ och $z'_y(0,0) = 0$.