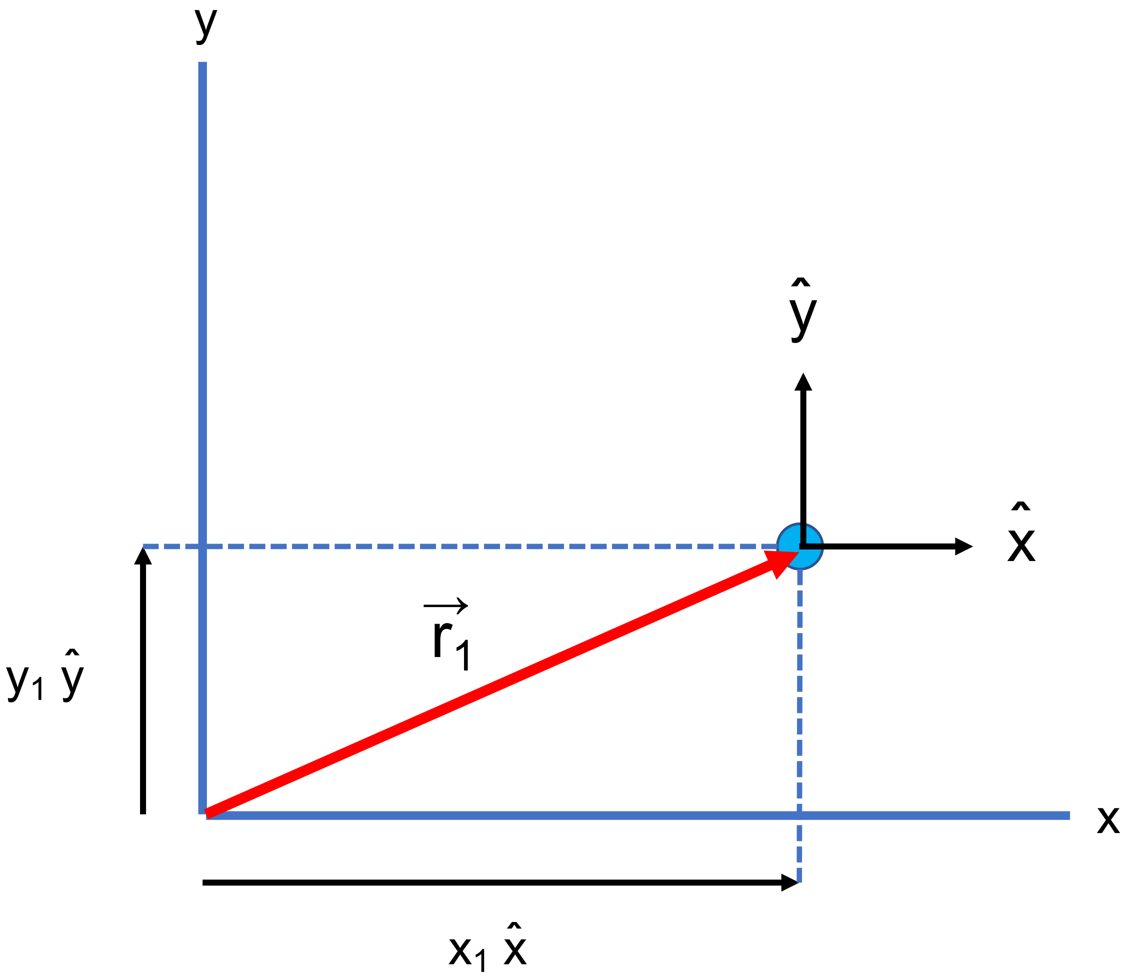
Mekanik

Lektion 1

Kartesiska koordinater

$\vec{r}_1 = x_1\,\hat{x} + y_1\,\hat{y}$

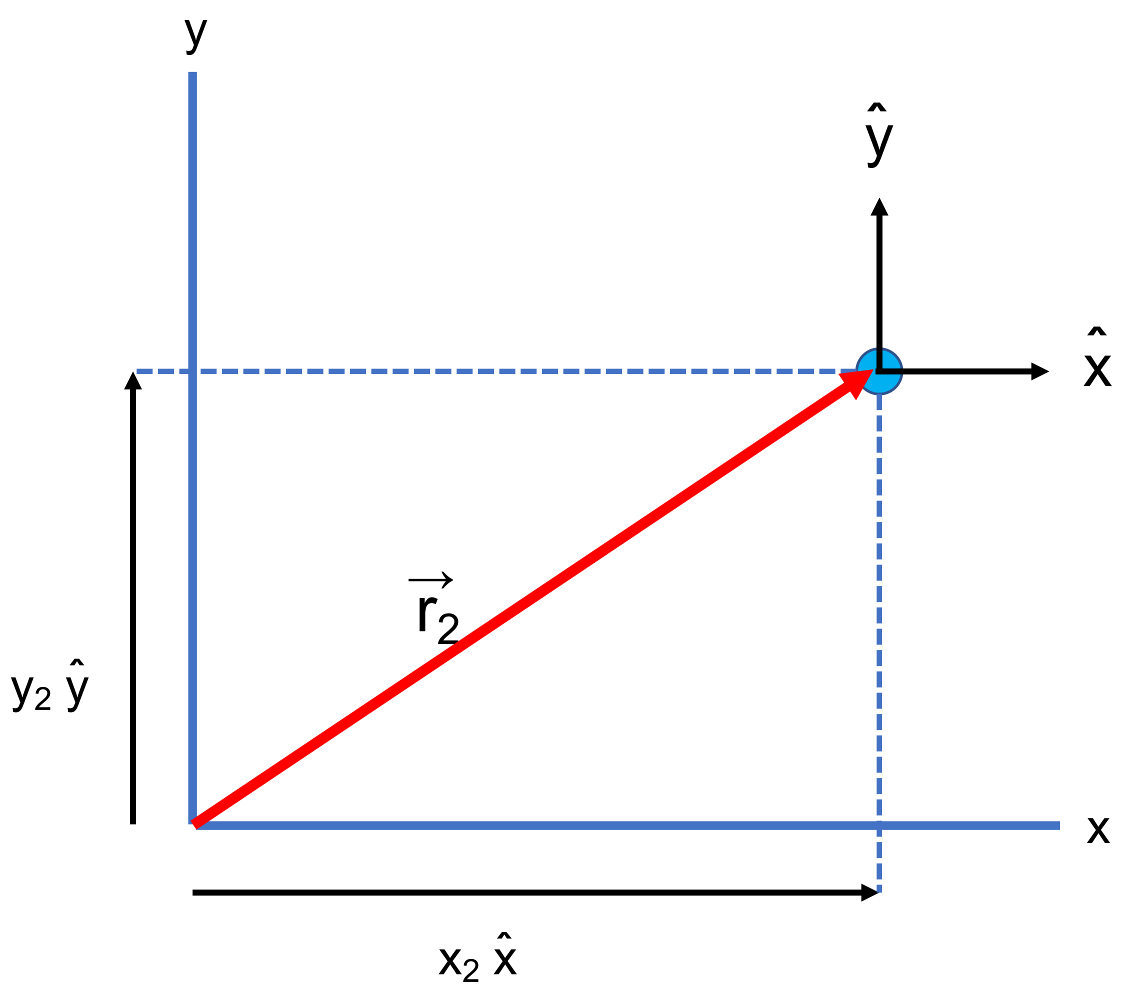
$\hat{v}$ enhetlig vektor



Kartesiska koordinater

$\vec{r}_2 = x_2\,\hat{x} + y_2\,\hat{y}$

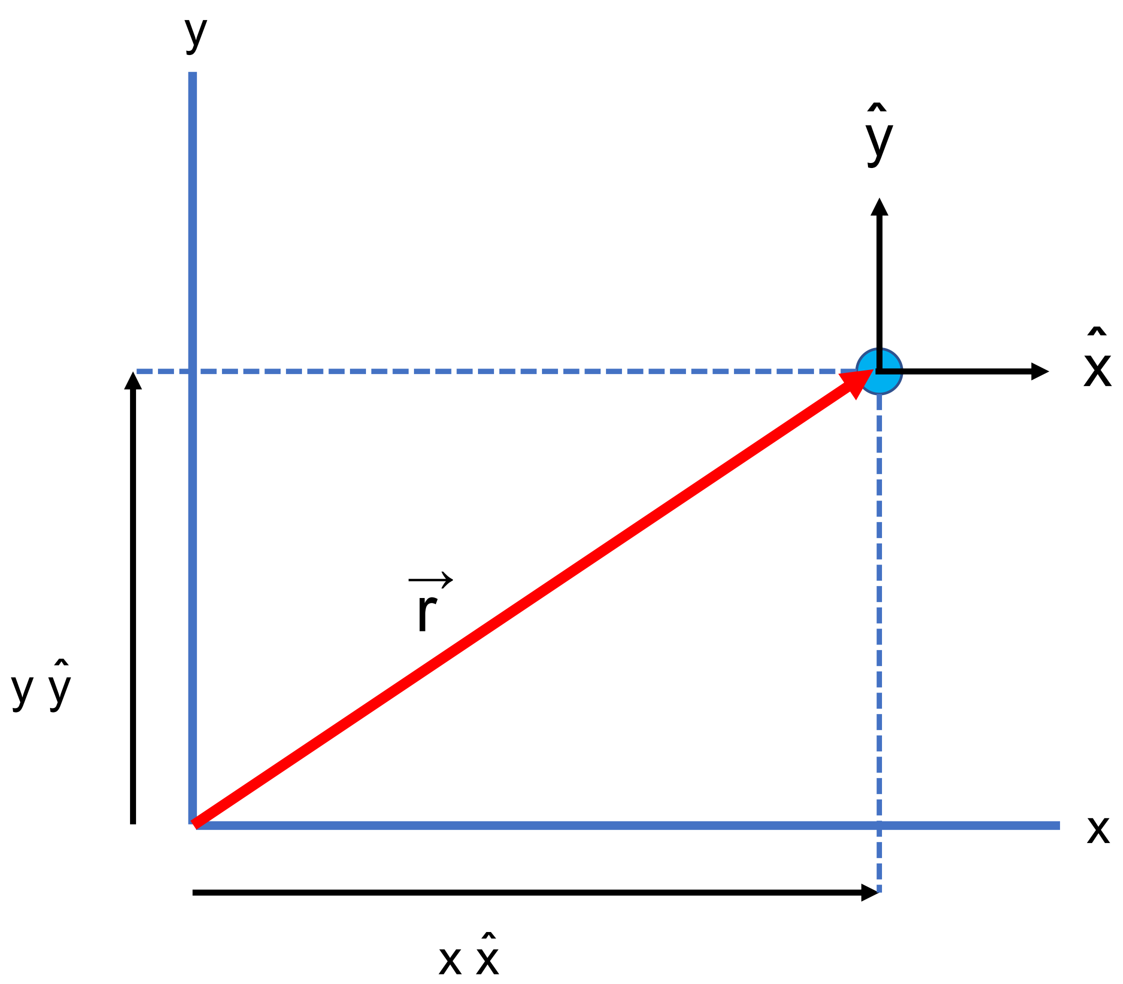
$\hat{v}$ enhetlig vektor



Kartesiska koordinater

$$\vec{r} = x\,\hat{x} + y\,\hat{y}$$

$\hat{v}$ enhetlig vektor

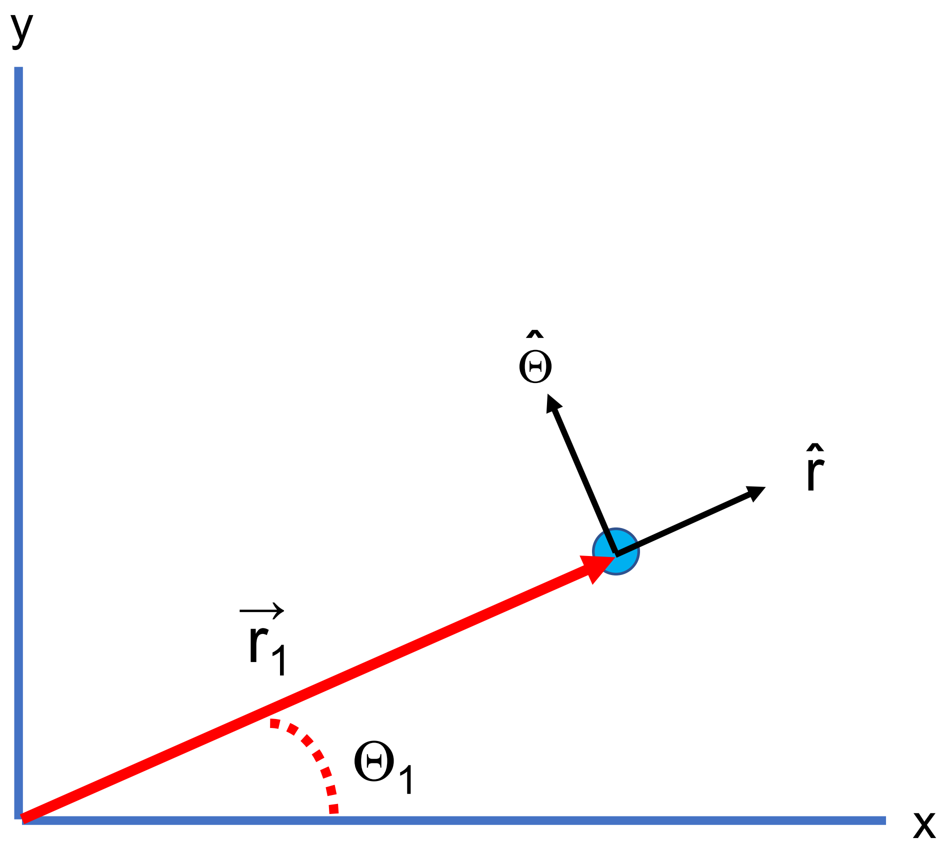


$$\vec{r} = x\,\hat{x} + y\,\hat{y}$$

$$\frac{d\,\vec{r}}{d\,t} = \frac{dx}{dt}\,\hat{x} + \frac{dy}{dt}\,\hat{y}$$

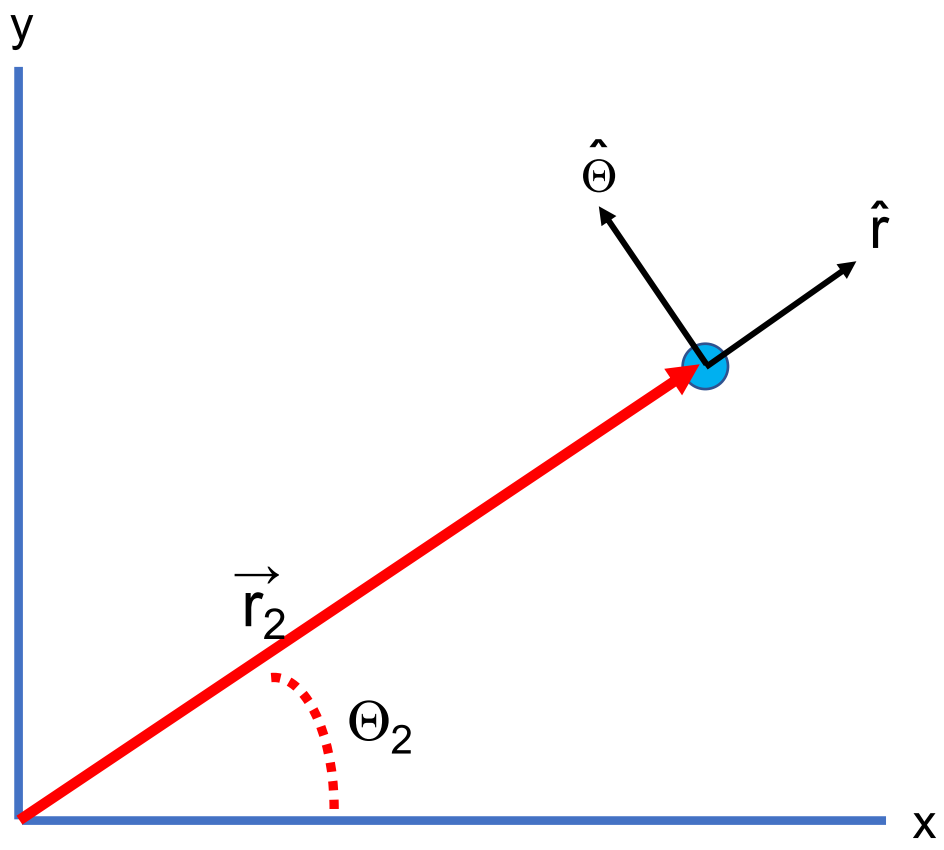
$\vec{r}_1 = r_1 \, \hat{r}$

Polära koordinater



$\vec{r}_2 = r_2\,\hat{r}$

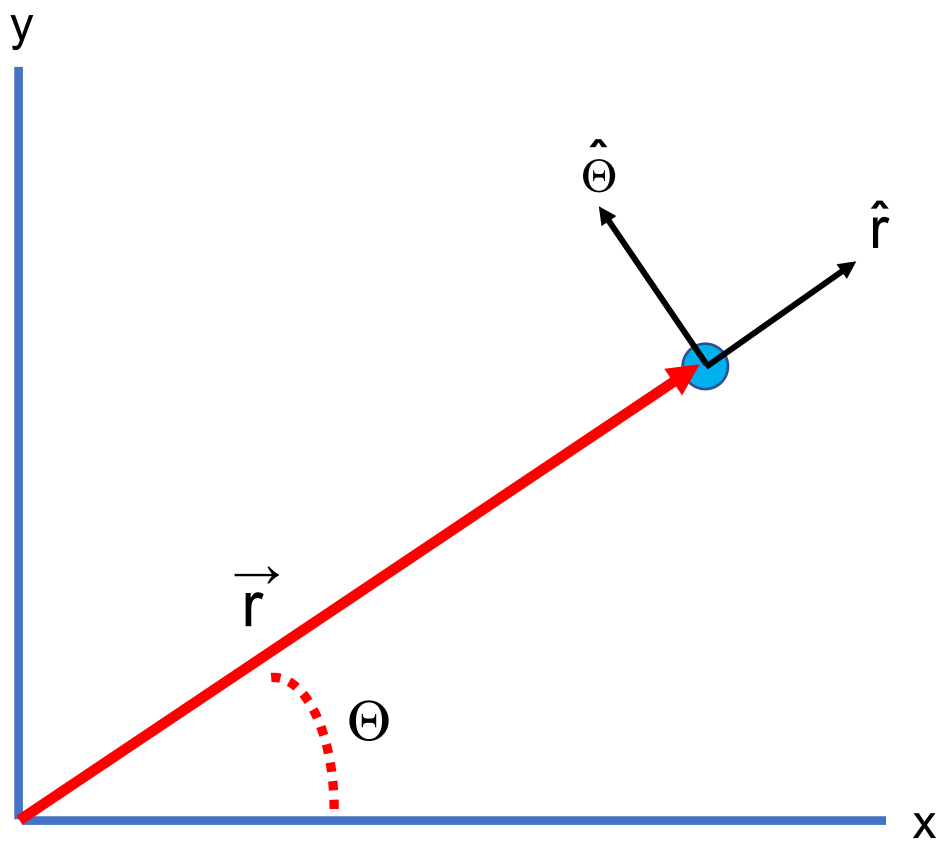
Polära koordinater



Polära koordinater

$$\vec{r} = r\,\hat{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\cdot\hat{r} + \frac{d\hat{r}}{dt}\,r$$

?



$$\hat{r} = \cos\Theta\,\hat{x} + \sin\Theta\,\hat{y}$$

$$\hat{\Theta} = -\sin\Theta\,\hat{x} + \cos\Theta\,\hat{y}$$

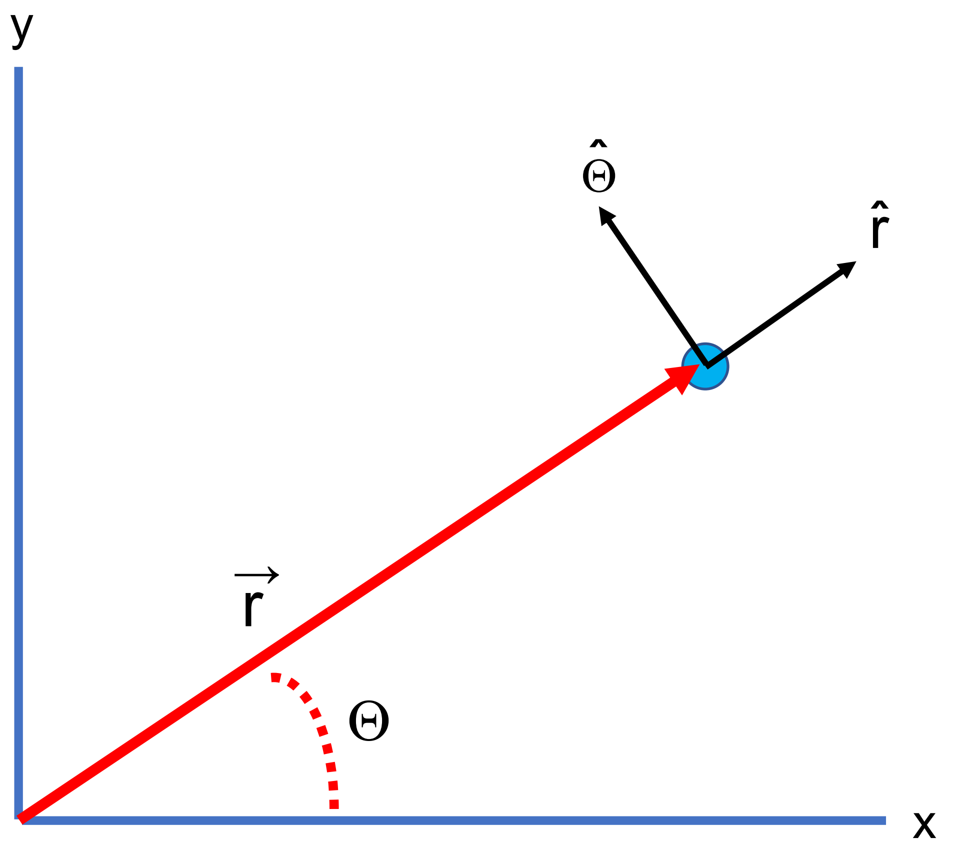
$$\frac{d\hat{r}}{dt} = -\sin(\theta)\,\dot{\theta}\hat{x} + \cos(\theta)\,\dot{\theta}\hat{y}$$

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = -\sin(\theta)\,\dot{\theta}\hat{x} + \cos(\theta)\,\dot{\theta}\hat{y} =$$
$$= \dot{\theta}[-\sin(\theta)\,\hat{x} + \cos(\theta)\,\hat{y}] = \dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\,\hat{r} + r\,\dot{\Theta}\hat{\Theta}$$

$$\vec{r} = r\,\hat{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\cdot\hat{r} + \frac{d\hat{r}}{dt}\cdot r$$

Polära koordinater



$$\hat{r} = \cos\Theta\,\hat{x} + \sin\Theta\,\hat{y}$$

$$\hat{\Theta} = -\sin\Theta\,\hat{x} + \cos\Theta\,\hat{y}$$

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = -\sin(\theta)\,\dot{\theta}\hat{x} + \cos(\theta)\,\dot{\theta}\hat{y}$$

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = -\sin(\theta)\,\dot{\theta}\hat{x} + \cos(\theta)\,\dot{\theta}\hat{y} =$$
$$= \dot{\theta}[-\sin(\theta)\,\hat{x} + \cos(\theta)\,\hat{y}] = \dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\,\hat{r} + r\,\dot{\Theta}\hat{\Theta}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[\dot{r}\,\hat{r} + r\,\dot{\Theta}\hat{\Theta}] =$$
$$= (\ddot{r} - r\,\dot{\Theta}^2)\,\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\Theta} + r\ddot{\Theta})\hat{\Theta}$$

4. En partikel beskrivs i planpolära koordinater av $\bar{r} = r(t)\hat{r}(t)$ och $\theta = \theta(t)$ där $r(t) = t^2$ m och $\theta(t) = t$ rad .

a. Vad är partikelns läge efter 2s, $\bar{r}(t = 2\text{s})$, och vad är avståndet till origo, $\left|\bar{r}(t = 2\text{s})\right|$?

a. Partikelns läge efter 2s, $\bar{r}(t = 2\text{s}) = 4\hat{r}$ m; $\theta = 2$ rad

Partikelns avstånd till origo efter 2s, $\left|\bar{r}(t = 2\text{s})\right| = r = 4$ m

4. En partikel beskrivs i planpolära koordinater av $\overline{r} = r(t)\hat{r}(t)$ och $\theta = \theta(t)$ där $r(t) = t^2$ m och $\theta(t) = t$ rad .

a. Vad är partikelns läge efter 2s, $\overline{r}(t = 2\text{s})$, och vad är avståndet till origo, $|\overline{r}(t = 2\text{s})|$?

b. Vad är partikelns hastighet efter 2s, $\overline{v}(t = 2\text{s})$, och vad är hastighetens belopp, $|\overline{v}(t = 2\text{s})|$?

b. $\overline{v} = \dot{\overline{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} = 2t\hat{r} + t^2 \cdot 1\hat{\theta} = 2t\hat{r} + t^2\hat{\theta}$ m/s

Partikelns hastighet efter 2s, $\overline{v}(t = 2\text{s}) = 4\hat{r} + 4\hat{\theta}$ m/s; $\theta = 2$ rad

Hastighetens belopp efter 2s, $|\overline{v}(t = 2\text{s})| = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = 4\sqrt{2} \approx 5.66$ m/s

4. En partikel beskrivs i planpolära koordinater av $\overline{r} = r(t)\hat{r}(t)$ och $\theta = \theta(t)$ där $r(t) = t^2$ m och $\theta(t) = t$ rad .

a. Vad är partikelns läge efter 2s, $\overline{r}(t = 2\text{s})$, och vad är avståndet till origo, $\left|\overline{r}(t = 2\text{s})\right|$?

b. Vad är partikelns hastighet efter 2s, $\overline{v}(t = 2\text{s})$, och vad är hastighetens belopp, $\left|\overline{v}(t = 2\text{s})\right|$?

c. Vad är partikelns acceleration efter 2s, $\overline{a}(t = 2\text{s})$, och vad är accelerationens belopp, $\left|\overline{a}(t = 2\text{s})\right|$?

c. $\overline{a} = \dot{\overline{v}} = \ddot{\overline{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta} = (2 - t^2 \cdot 1)\hat{r} + (0 + 2 \cdot 2t \cdot 1)\hat{\theta} =$
$(2 - t^2)\hat{r} + 4t\hat{\theta}$ m/s^2; $\theta = 2$ rad

Partikelns acceleration efter 2s, $\overline{a}(t = 2\text{s}) = -2\hat{r} + 8\hat{\theta}$ m/s^2 ; $\theta = 2$ rad

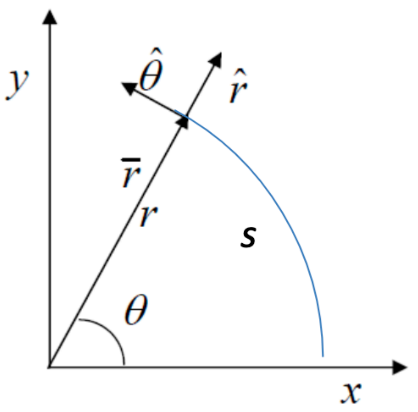
Accelerationens belopp efter 2s, $\left|\overline{a}(t = 2\text{s})\right| = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = \sqrt{68} \approx 8.25$ m/s^2

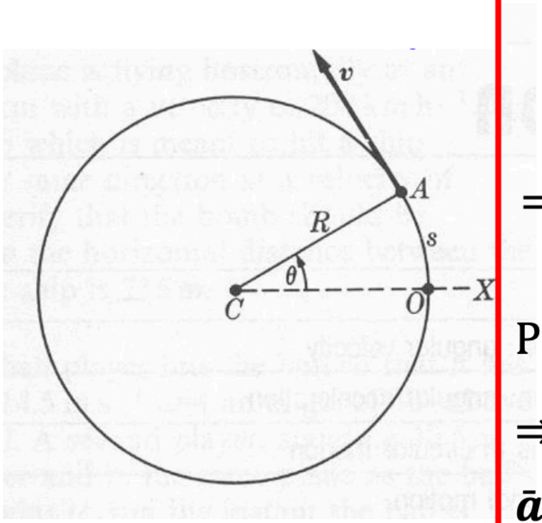
Svar: **a**. $\overline{r}(t=2\text{s})=4\hat{r}$ m; $\theta=2$ rad ; $|\,\overline{r}(t=2\text{s})|=4$ m

b. $\overline{v}(t=2\text{s})=4\hat{r}+4\hat{\theta}$ m/s; $\theta=2$ rad ; $|\overline{v}(t=2\text{s})|\approx 5.66$ m/s

c. $\overline{a}(t=2\text{s})=-2\hat{r}+8\hat{\theta}$ m/s^2 ; $\theta=2$ rad ; $|\overline{a}(t=2\text{s})|\approx 8.25$ m/s^2

*Specialfallet **likformig cirkelrörelse** i polära koordinater*





Likformig rörelse $\Rightarrow$ v konstant, sträckan $s = r\theta$

$$\bar{\boldsymbol{a}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\boldsymbol{r}} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left\{ \begin{array}{c} r = R \\ \dot{r} = 0 \\ \ddot{r} = 0 \\ \theta = \dfrac{s}{r} = \dfrac{s}{R} \\ \dot{\theta} = \omega = \dfrac{1}{R}\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{v}{R} \\ \ddot{\theta} = \dfrac{\dot{v}}{R} = 0 \end{array} \right\}$$

$$= -\frac{v^2}{R}\hat{\boldsymbol{r}}$$

Periodtiden T, Omkrets $= 2\pi R$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{2\pi R}{T} \qquad \Rightarrow \quad \bar{\boldsymbol{a}} = -\frac{4\pi^2 R}{T^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

$\bar{\boldsymbol{a}}$ uttryckt i vinkelhastighet:

$$v = R\omega \quad \Rightarrow \quad \bar{\boldsymbol{a}} = -\omega^2 R\hat{\boldsymbol{r}}$$

As correctly pointed out by a student during the lection, the formula

$$\vec{a} = -\omega^2 \cdot R \cdot \hat{r}$$

is not applicable in problem 5 because the motion of the particle is not “likformig”. For example, in problem 5, $\ddot{\Theta} \neq 0$