

TNSL05 – Optimering, Modellering och Planering

Föreläsning 5

Agenda

- Graf/nätverk:
- Begrepp
- Representation
- Exempel:
- Minkostnadsflödeproblem
- Billigastevägproblem

Hittills

- Föreläsning 1: kursadministration, intro: Vad är matematisk modellering?, historia, tillämpningsexempel, komplexitet
- Föreläsning 2: summering och index, matematisk modellering
- Föreläsning 3: matematisk modellering, LP
- Föreläsning 4: matematisk modellering, HP

Kursens status

- Litteratur:
 - Har alla hunnit skaffa och börjat läsa i kursboken?
- Föreläsningar:
 - Idag FÖ5 av 11. Känns upplägget OK?
- Lektionerna/frågestunderna:
 - Har alla hittat lektionsplanen med uppgifterna?
 - Viktigt att inte komma efter i början.
- Laborationsmomentet:
 - Anmälningslistan ligger ute. Skriv upp er!
 - Läs redan nu labbinstruktionen som ligger på Lisam!
- Gruppuppgift 1:
 - Redovisas muntligt v. 47. Uppgiften och en anmälningslista kommer upp på Lisam senare idag.

Problemklassificering

- Linjärprogrammering (LP)
 - Alla samband (målfunktionen, bivillkoren) är linjära
- Ickelinjär programmering
 - Vissa av sambanden är ickelinjära
- Heltalsproblem
 - Kan tillhöra båda kategorierna
 - Alla/några av variablerna kan bara anta diskreta värden
- Nätverksproblem
 - Tydlig struktur
 - Ofta geografiska
- Med mera...

Idag

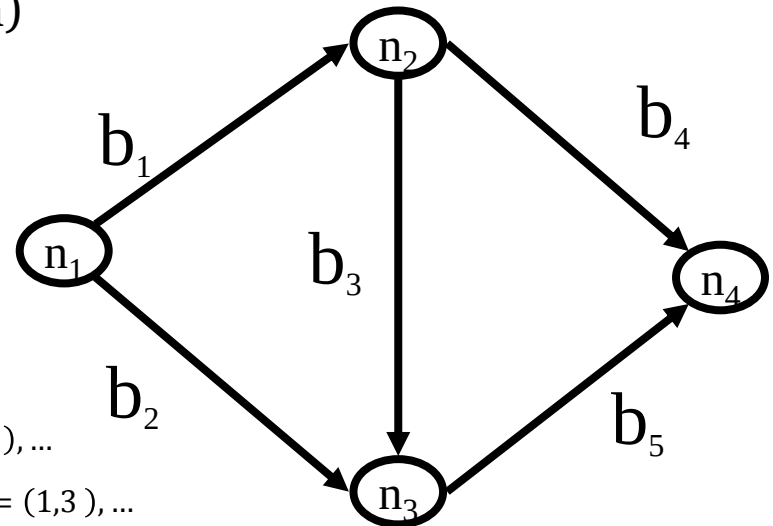
- Linjärprogrammering (LP)
 - Alla samband (målfunktionen, bivillkoren) är linjära
- Ickelinjär programmering
 - Vissa av sambanden är icke linjära
- Heltalsproblem (HP)
 - Kan tillhöra båda kategorierna
 - Alla/några av variablerna kan bara anta diskreta värden
- Nätverksproblem
 - Tydlig struktur
 - Ofta geografiska
- Med mera...

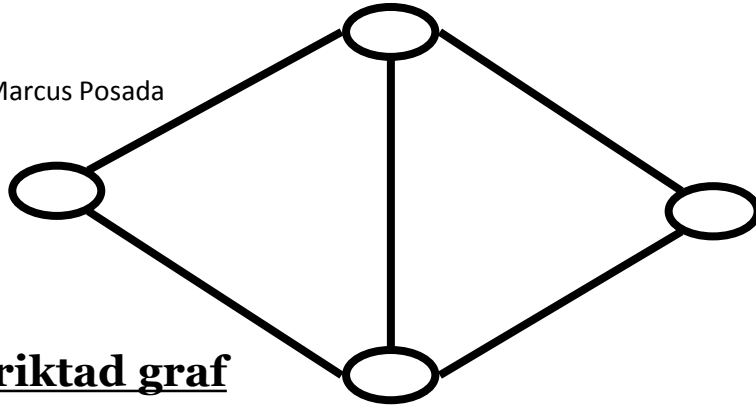
Agenda

- Graf/nätverk:
- Begrepp
- Representation
- Exempel:
- Minkostnadsflödeproblem
- Billigastevägproblem

Begrepp: graf/nätverk

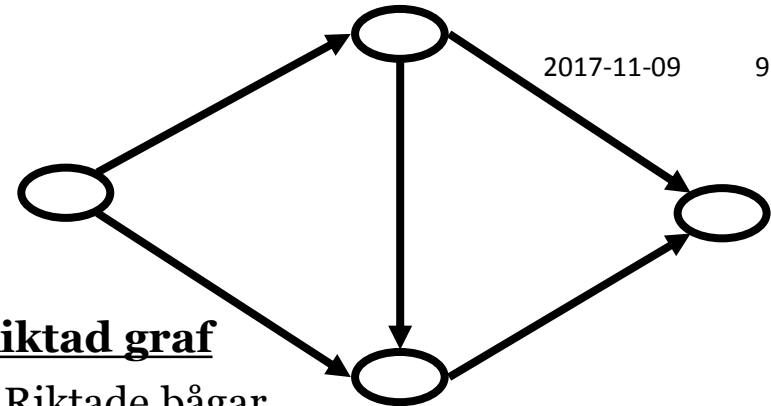
- Graf(N, B): Avbildning (relation mellan)
 - Noder
 - Nodmängd $N = \{n_1, n_2, n_3, n_4\}$
 - Bågar
 - Bågmängd $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$
 - Båglista
 - Start&slutnod $b_1 = (n_1, n_2), b_2 = (n_1, n_3), \dots$
 - Nummer start&slutnod $b_1 = (1, 2), b_2 = (1, 3), \dots$
- Nätverk: graf med data på noder/bågar
 - Kapacitet, kostnad, flödesstyrkor etc.
- Snitt
 - Mängd bågar som delar N (odmängden) i två delar





Oriktad graf

- Oriktade bågar
- Valens
 - Antal bågar som ansluter till noden.
- Kedja eller Väg
 - Sekvens av oriktade bågar
- Cykel
 - Kedja med samma start/slutnod
- Sammanhängande graf
 - Minst en kedja mellan varje par av noder
- Träd
 - Sammanhängande graf utan cykler
- Uppspännande träd
 - Träd som omfattar alla noder i grafen

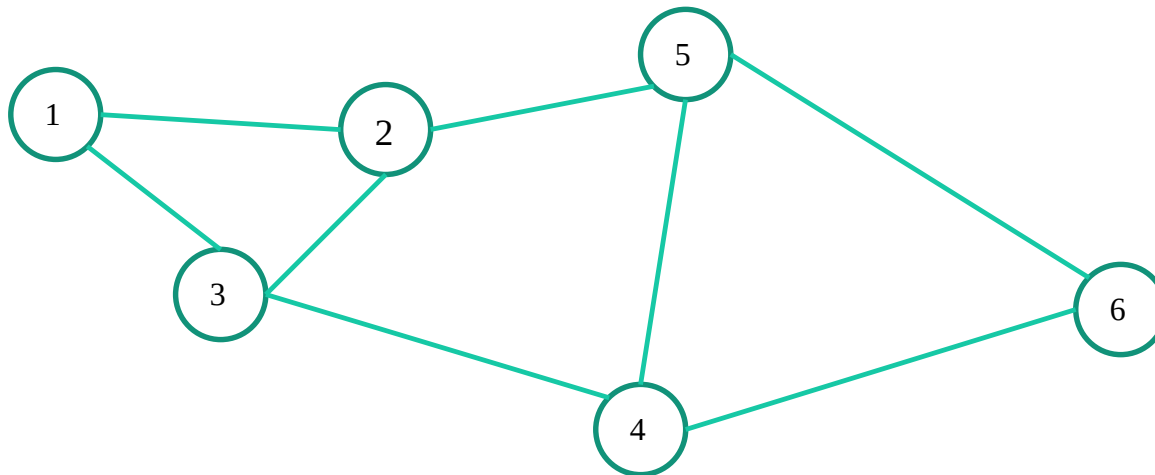


Riktad graf

- Riktade bågar
- Väg eller Rutt
 - Sekvens av bågar i framåtriktningen
- Kedja
 - Sekvens av bågar utan riktningshänsyn
- Riktad cykel
 - Väg med samma start/slutnod
- Acyklisk graf
 - Innehåller ingen riktad cykel
- Starkt sammanhängande graf
 - En rutt mellan varje par av noder
- Tudelad graf
 - Kan delas upp i två mängder utan att det finns bågar mellan noder i en och samma mängd

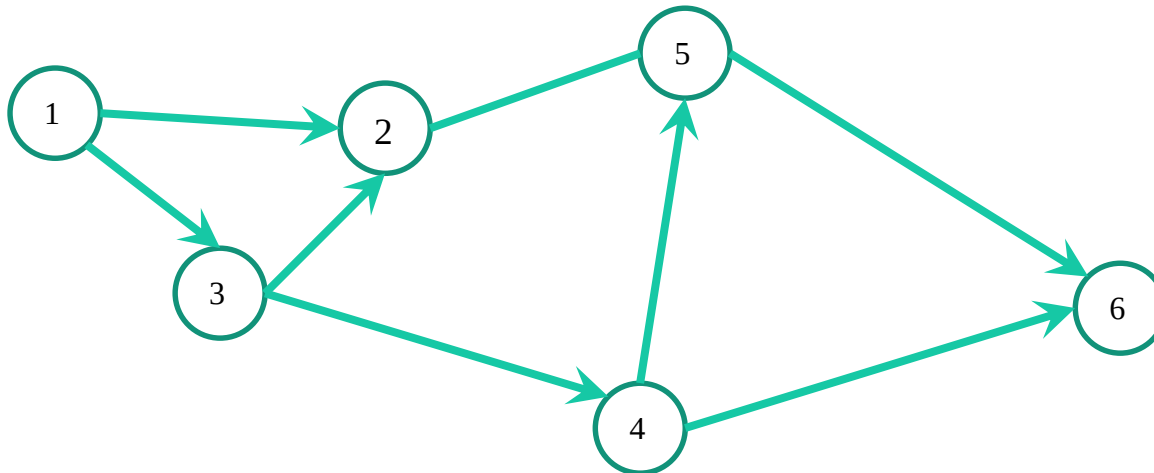
Begrepp

- En graf $G=(N,B)$ består av
 - N : en mängd noder
 - B : en mängd bågar
- Båge: riktad/oriktad, mellan två noder



Begrepp

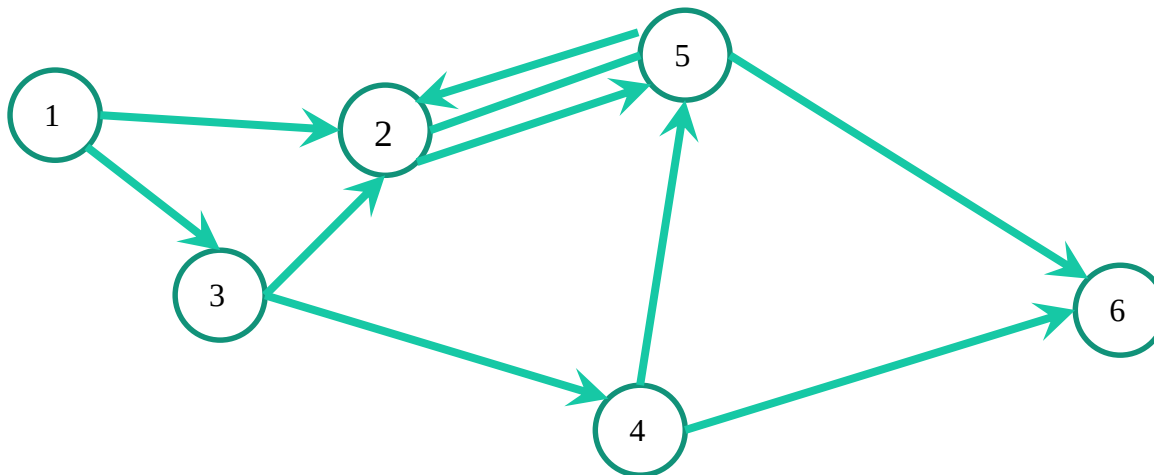
- En oriktad båge kan beskrivas av två riktade



Begrepp

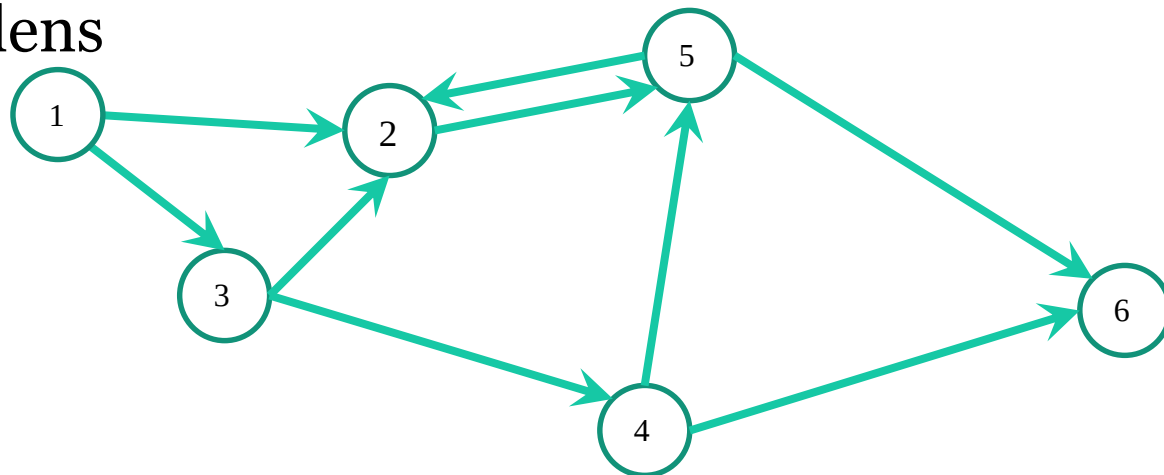
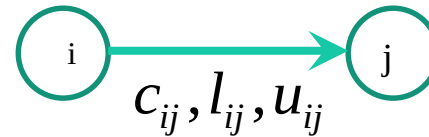
- En oriktad båge kan beskrivas av två riktade
- Varje båge kan skrivas som

$b = (\text{startnod}, \text{slutnod})$, $b = (i, j), i \in N, j \in N$



Begrepp

- Kostnad/vikt...
- Begränsningar
- Valens
 - Invalens
 - Utvalens



Agenda

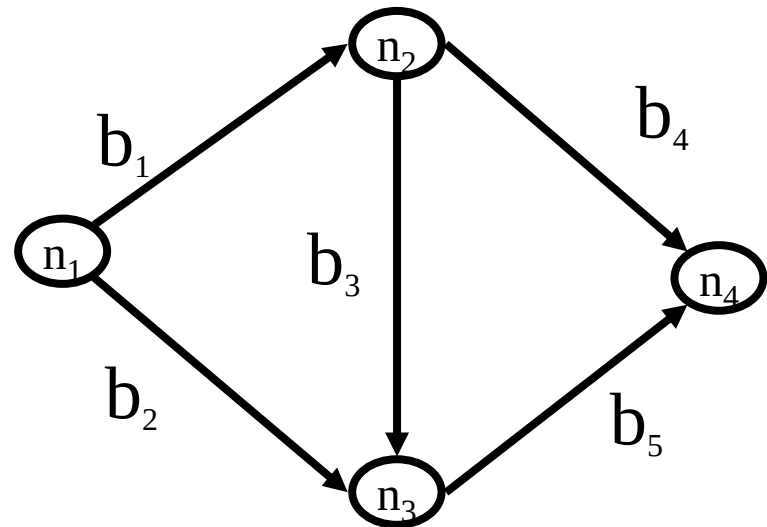
- Graf/nätverk:
- Begrepp
- Representation
- Exempel:
- Minkostnadsflödeproblem
- Billigastevägproblem

Grafrepresentation

- Algebraisk representation av graf
 - Nodmatrixis

$$n_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om båge går från nod } i \text{ till nod } j \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

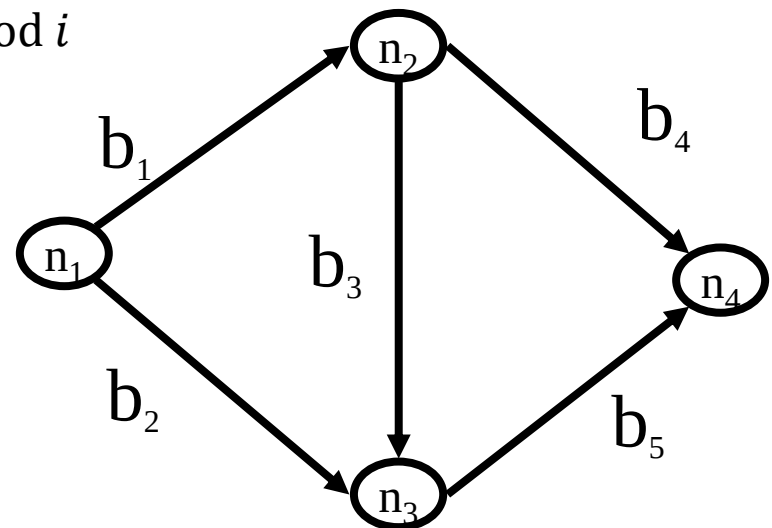


Grafrepresentation

- Algebraisk representation av graf
 - Anslutningsmatris
 - Noder~Rader; Bågar~Kolumner

$$a_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{om båge } j \text{ börjar i nod } i \\ +1 & \text{om båge } j \text{ slutar i nod } i \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



Agenda

- Graf/nätverk:
- Begrepp
- Representation
- Exempel:
- Minkostnadsflödeproblem
- Billigastevägproblem

Flödesnätverk

- Definiera
 - x_{ij} = flödet på båge (i,j) från nod i till nod j
 - Nodstyrka
 - $d_i = \sum_{j|b_{ji} \in B} x_{ji} - \sum_{j|b_{ij} \in B} x_{ij} = \text{inflöde-utflöde}$
 - Om $d_i < 0$, i är en **källa**
 - Om $d_i > 0$, i är en **sänka**
 - Om $d_i = 0$, i är en **mellannod**
- Minkostnadsflöde:
 - Givet ett nätverk, finn ett flöde med minimal kostnad så att givna käll- och sänkstyrkor på noder uppfylls, och så att kapacitetsbegränsningar på bågar inte överskrids.

Nätverk, arbetsgång

- Börja med att rita upp fysiska samband
 - Noder
 - Bågar
- Inför nod- och bågdata
 - Kan då generera fler noder och bågar (modellmässiga, icke-fysiska)
 - Noder
 - Kan vara källa (bestämd styrka <0) sänka (bestämd styrka >0) eller mellannod (styrka 0)
 - Summa källstyrka = Summa sänkstyrka
 - Kan ev. bli behov för ”överskottsbågar &/eller noder”
 - Bågar
 - Kan ha kostnader (eller motsvarande)
 - Kan ha övre gränser och undre gränser (ibland ≥ 0)
- Observera!
 - Noder kan inte ha kostnader!
 - Hjälpbågar (och ev. nod/noder)
 - Noder kan inte ha begränsningar!
 - Hjälpbågar (och ev. nod/noder)

Uppgift 3.6

Två städer, A och B, producerar 500 ton respektive 400 ton hushållsfall per dag. Avfallet måste först brännas vid någon av anläggningarna C eller D, båda med kapaciteten 500 ton/dag. Kostnaden vid C är 320 kr/ton och vid D 240 kr/ton. Vid förbränningen förvandlas 1 ton avfall till 200 kg slagg vilket måste dumpas vid någon av slutstationerna E eller F. Varje slutstation kan mottaga som mest 150 ton slagg/dag. Transportkostnaden är 150 kr per ton och mil, både för avfallet och slaggen. Avståndet (i mil) mellan de olika platserna framgår av tabellen nedan.

	C	D
A	7	1
B	8	9

	E	F
C	1	3
D	3	2

Formulera problemet att på billigaste sätt ta hand om hushållsavfallet.

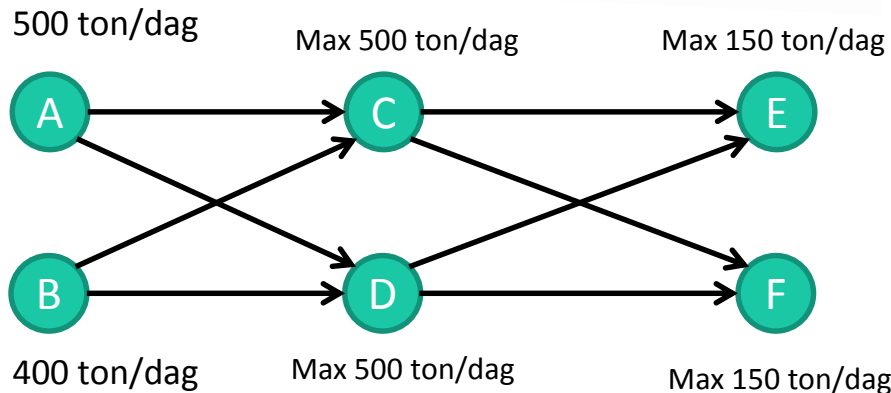
Uppgift 3.6

Två städer, A och B, producerar 500 ton respektive 400 ton hushållsavfall per dag. Avfallet måste först brännas vid någon av anläggningarna C eller D, båda med kapaciteten 500 ton/dag. Kostnaden vid C är 320 kr/ton och vid D 240 kr/ton. Vid förbränningen förvandlas 1 ton avfall till 200 kg slagg vilket måste dumpas vid någon av slutstationerna E eller F. Varje slutstation kan mottaga som mest 150 ton slagg/dag. Transportkostnaden är 150 kr per ton och mil, både för avfallet och slaggen. Avståndet (i mil) mellan de olika platserna framgår av tabellen nedan.

	C	D
A	7	1
B	8	9

	E	F
C	1	3
D	3	2

Formulera problemet att på billigaste sätt ta hand om hushållsavfallet.



1 ton avfall => 200kg slagg

Variabeldefinition:

x_{ij} = antal ton avfall/slagg som skickas från i till j , $(i, j) \in B$

$$\min z = 320 \cdot (x_{AC} + x_{BC}) + 240 \cdot (x_{AD} + x_{BD}) + 150 \cdot (7x_{AC} + x_{AD} + 8x_{BC} + 9x_{BD} + x_{CE} + 3x_{CF} + 3x_{DE} + 2x_{DF})$$

då $x_{AC} + x_{AD} = 500$ (tillgång stad A)

$x_{BC} + x_{BD} = 400$ (tillgång stad B)

$x_{AC} + x_{BC} \leq 500$ (kapacitet i C)

$x_{AD} + x_{BD} \leq 500$ (kapacitet i D)

$x_{CE} + x_{DE} \leq 150$ (kapacitet i E)

$x_{CF} + x_{DF} \leq 150$ (kapacitet i F)

$$0.2 \cdot (x_{AC} + x_{BC}) = x_{CE} + x_{CF}$$

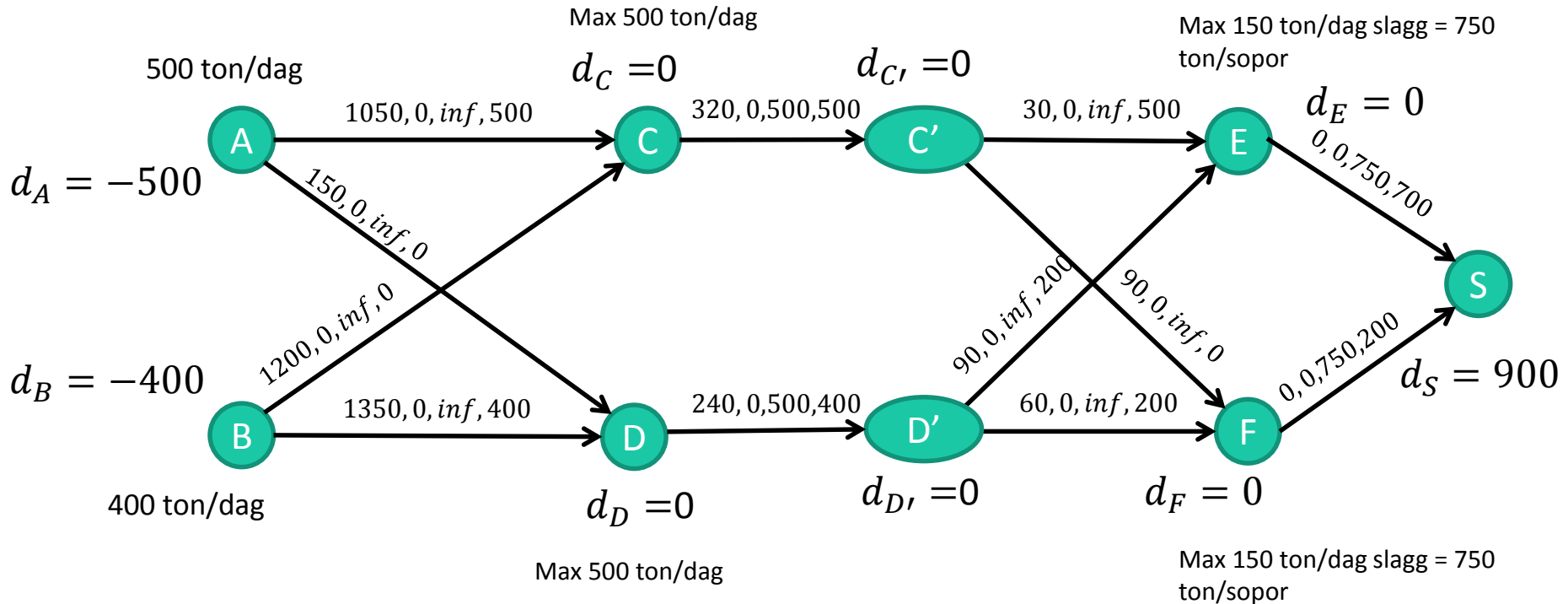
$$0.2 \cdot (x_{AD} + x_{BD}) = x_{DE} + x_{DF}$$

$$x_{ij} \geq 0, (i, j) \in B$$

Uppgift 3.6/8.4

	C	D
A	7	1
B	8	9

	E	F
C	1	3
D	3	2



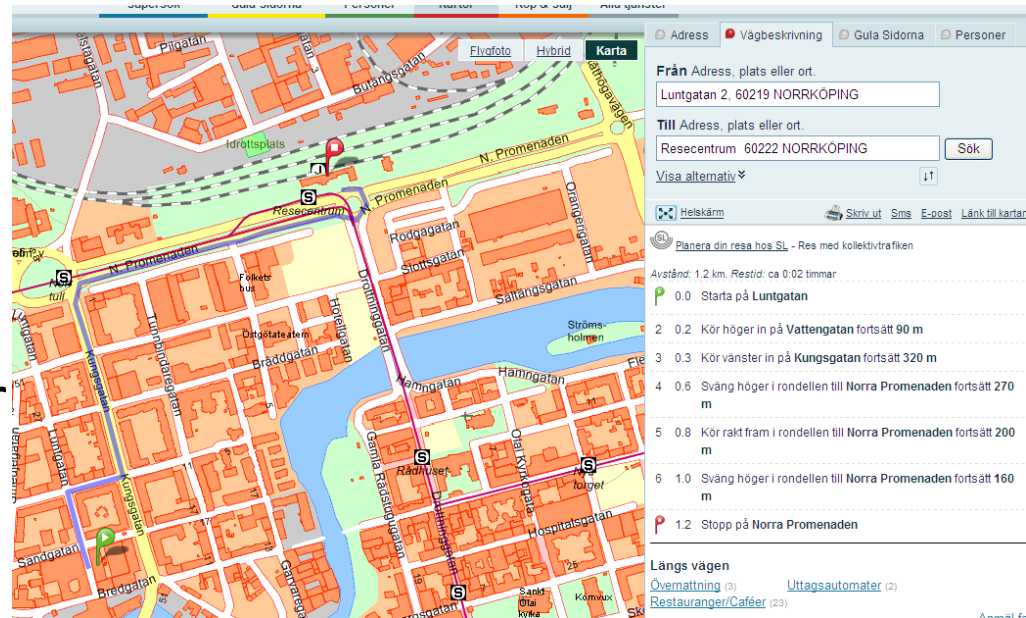
$$\min z = \sum_{(i,j) \in B} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j|(j,i) \in B} x_{ji} - \sum_{j|(i,j) \in B} x_{ij} = d_i, i \in N \quad l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}, (i,j) \in B$$

Billigastevägproblem (BVP)

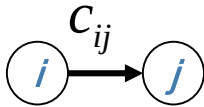
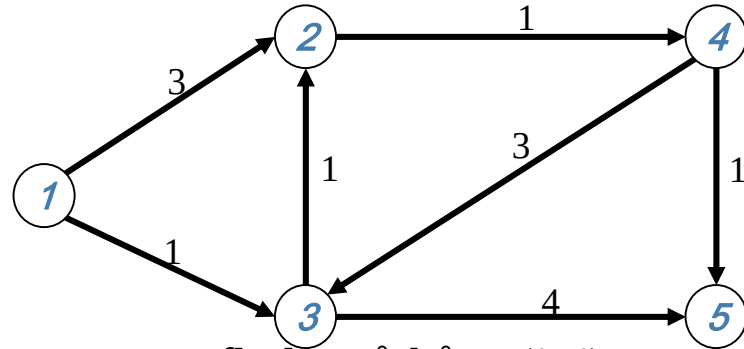
Givet ett riktat nätverk med bågkostnader, finn billigaste vägen mellan givna startnod(er) och slutnod(er).

- En startnod till en slutnod
 - Individuell vägplanering
- Alternativ
 - En startnod till alla slutnoder
 - Dra elledningar
 - Alla noder till alla andra
 - Trafikplanering



LP-formulering, Billigaste väg-problemet

- Ex: Hitta billigaste väg från 1 till 5
 - Varje båge som används orsakar kostnad c_{ij}
 - Antag: inga cykler med negativ kostnad
 - Kostnaden är exempelvis tid, avstånd, utsläpp
 - Problemet är ett specialfall av minkostnads-flödesproblem
 - Skicka en enhet från startnod till slutnod
 - (Kan formuleras som ett LP!)



x_{ij} = flödet på båge (i, j)

Kan i detta problem tolkas som

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om bågen } (i, j) \text{ används} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$\min 3x_{12} + x_{13} + x_{24} + x_{32} + 4x_{35} + 3x_{43} + x_{45}$$

$$\text{då } -x_{12} - x_{13} = -1$$

$$x_{12} - x_{24} + x_{32} = 0$$

$$x_{13} - x_{32} - x_{35} + x_{43} = 0$$

$$x_{24} - x_{43} - x_{45} = 0$$

$$x_{35} + x_{45} = 1$$

$$x_{ij} \geq 0, (i, j) \in B, \text{ där } B \text{ är bågmängden}$$

~~$$x_{ij} \leq 1, \text{ heltal}$$~~ Ej nödvändigt

www.liu.se