

TNA001- Matematisk grundkurs

Tentamen 2013-08-28 - Lösningsskiss

1. a)

$$\frac{x}{x-6} \leq x \Leftrightarrow \frac{x}{x-6} - x \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x - x(x-6)}{x-6} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x - x^2 + 6x}{x-6} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{7x - x^2}{x-6} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x(7-x)}{x-6} \leq 0$$

Sedvanligt teckenschema visar att detta är uppfyllt $\Leftrightarrow x \in [0,6[\cup [7,\infty[$.

Svar: $x \in [0,6[\cup [7,\infty[$.

b) $\ln(x+4) + 2\ln x = 3\ln 2$, där vi på grund av $\ln$ -funktionens definitionsområde, har att $x+4 > 0$ och $x > 0$, d.v.s. vi har villkoren

$$\ln(x+4) + 2\ln x = 3\ln 2, x > 0 \Leftrightarrow \ln(x+4) + \ln x^2 = \ln 8, x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\ln((x+4) \cdot x^2) = \ln 8, x > 0 \Leftrightarrow \ln(x^3 + 4x^2) = \ln 8, x > 0 \Leftrightarrow [\text{ty } \ln - \text{funktionen är omvändbar}] \Leftrightarrow$$

$$x^3 + 4x^2 = 8, x > 0 \Leftrightarrow x^3 + 4x^2 - 8 = 0, x > 0 \Leftrightarrow$$

$$[\text{polynomdividera VL med } x+2, \text{ ty } x = -2 \text{ är nollställe till } x^3 + 4x^2 - 8] \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 2x - 4 = 0, x > 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 - 5 = 0, x > 0 \Leftrightarrow x = -1 + \sqrt{5}$$

Svar: $x = -1 + \sqrt{5}$

$$2a) \text{ Vi har att } |2x-1| = \begin{cases} 2x-1 & \text{om } x \geq \frac{1}{2} \\ 1-2x & \text{om } x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \text{ och } |x| = \begin{cases} x & \text{om } x \geq 0 \\ -x & \text{om } x < 0 \end{cases}$$

Vi får tre fall:

$x < 0$ ger oss ekvationen $1 - 2x + x - x = 0 \Leftrightarrow 1 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$, som inte är lösning.

$0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ ger ekvationen $1 - 2x - x - x = 0 \Leftrightarrow 1 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$, som duger.

$x > \frac{1}{2}$ ger ekvationen $2x - 1 - x - x = 0 \Leftrightarrow -1 = 0$, som saknar lösning.

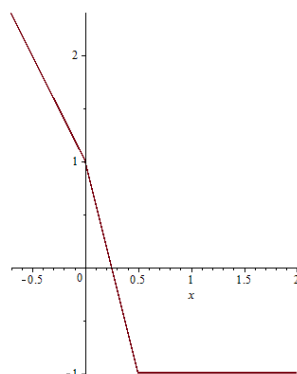
Svar: $x = \frac{1}{4}$

b) Vi har $f(x) = |2x-1| - |x| - x$. Ovan får vi funktionsuttrycket i de tre intervallen. Vi har alltså

$$f(x) = \begin{cases} 1-2x & \text{om } x \leq 0 \\ 1-4x & \text{om } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -1 & \text{om } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vi har alltså att $f(x) = -1 = \text{konstant}$ för alla $x \geq \frac{1}{2}$. Då är f inte omvändbar och saknar därmed invers.

Anm: Med utgångspunkt från ovan kan grafen $y = f(x)$ enkelt skissas (se nedan). Grafen indikerar också att f inte är omvändbar och saknar därmed invers.



Svar: f saknar invers.

3. a) Låt $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$. Vi får

A. Sambandet gäller ty $z - \bar{z} = x + iy - x + iy = 2iy = 2i \operatorname{Im} z$

B. Sambandet gäller ty $z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2 = (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = |z|^2$

C. Sambandet gäller ty $\overline{z \cdot \bar{z}} = \overline{(x + iy)(x - iy)} = \overline{x^2 + y^2} = [ty x^2 + y^2 \text{ är reellt}] = |z|^2$

Svar: Alla tre sambanden gäller för godtyckligt z .

b)

$$z = 1 - \frac{1-i}{1+i} = 1 - \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 1 - \frac{1-2i+i^2}{2} = \frac{2-1+2i+1}{2} = 1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4} \Rightarrow$$

$$z^{100} = \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^{100} = 2^{50}e^{i25\pi} = 2^{50}e^{i\pi} = -2^{50}$$

Svar: -2^{50}

4.

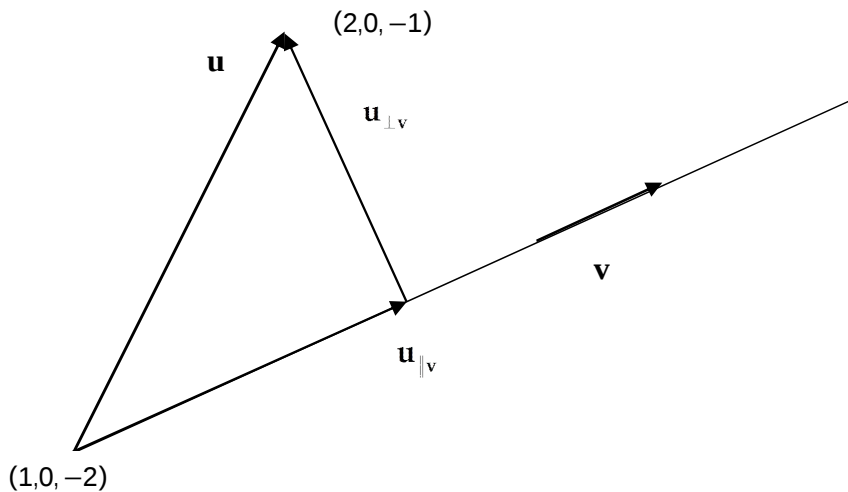
a) Linjen vi söker skall vara ortogonal mot den givna, d.v.s. riktningsvektorer ska vara ortogonala. Vi

kan då välja en linje med riktningen $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Linjerna skall skära varandra och vi kan välja punkten

$(1, 0, -2)$ som den gemensamma punkten. Alltså är linjen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ en linje med de sökta egenskaperna.

Svar: T.ex. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$.

b) Vi ritar först en figur och bildar vektorn $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



Det sökta avståndet ges av $|\mathbf{u}_{\perp \mathbf{v}}| = |\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\parallel \mathbf{v}}|$. Vi har enligt projektningsformeln att

$$\mathbf{u}_{\parallel \mathbf{v}} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \right) \mathbf{v} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}{6} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \text{ Alltså } \mathbf{u}_{\perp \mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(-\frac{1}{2} \right) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ och d\u00e4rmed har vi}$$

$$|\mathbf{u}_{\perp \mathbf{v}}| = \frac{1}{2} \sqrt{2}$$

Svar: S\u00f6kt avst\u00e5nd \u00e4r $\frac{1}{2} \sqrt{2}$ i.e.

5. Tips: Rita figurer! Enbart svar anges här.

Respektive funktion har egenskaperna

f_1 : 2, 4, 5 och 6,

f_2 : 1, 3, 4 och 5,

f_3 : 1, 4, 5 och 6.

f_4 : 1

6.

a) Se kurslitteraturen

b) Vi har via binomialsatsen

$$\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{x^2}\right)^9 = \sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} \left(\frac{x}{2}\right)^{9-k} \left(-\frac{1}{x^2}\right)^k = \sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} \cdot 2^{k-9} x^{9-k} \cdot x^{-2k} \cdot (-1)^k = \sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} \cdot 2^{k-9} (-1)^k x^{9-3k}.$$

Vi ser att den konstanttermen fås för $9 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = 3$, vilket ger att den sökta termen är

$$\binom{9}{3} \cdot 2^{-6} \cdot (-1)^3 = -\frac{9!}{3! \cdot 6!} \cdot \frac{1}{2^6} = -\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{2^6} = -\frac{3 \cdot 7}{2^4} = -\frac{21}{16}$$

Svar: $-\frac{21}{16}$

7. Vi använder ett induktionsbevis.

STEG 1: $P(1)$: $V(1) = D(x^1) = D(x) = 1$ enligt egenskap (i), $H(1) = 1 \cdot x^{1-1} = x^0 = 1$
Alltså $V(1) = H(1)$ d.v.s. $P(1)$ gäller.

STEG 2: Vi antar att $P(p)$ gäller för godtyckligt fixt tal $p \in \mathbf{Z}^+$, d.v.s. vi antar att
 $V(p) = H(p)$, d.v.s. vi antar att $D(x^p) = px^{p-1}$

Detta medför att

$$\begin{aligned} V(p+1) &= D(x^{p+1}) = D(x^p \cdot x) = (\text{enligt egenskap (ii)}) = D(x^p) \cdot x + x^p \cdot D(x) = \\ &= (\text{enligt antagandet och egenskap (i)}) = px^{p-1} \cdot x + x^p \cdot 1 = px^p + x^p = \\ &= (p+1)x^{(p+1)-1} = H(p+1) \end{aligned}$$

$$\text{d.v.s. } H(p) = V(p) \Rightarrow H(p+1) = V(p+1)$$

STEG 3 Enligt steg 1 gäller påståendet för $n = 1$. Då gäller det enligt steg 2 även för $n = 1 + 1 = 2$. Men då gäller det även för $n = 2 + 1 = 3$ o.s.v. Via matematisk induktion har vi alltså att påståendet gäller för alla $n \in \mathbf{Z}^+$, v.s.v.