TNA001- Matematisk grundkurs
Tentamen 2018-11-01 - Lösningsskiss

1. a)

$$\frac{3x}{x+2} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{3x}{x+2} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3x - 2(x+2)}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-4}{x+2} \geq 0$$
$$\Leftrightarrow //\text{Teckenschema}// \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup [4, \infty[$$

Svar: $x \in]-\infty, -2[\cup [4, \infty[$.

b)

$I_1: x \leq -1$	$I_2: -1 \leq x \leq 4$	$I_3: x \geq 4$
$-3x - 3 = 2 - x + 4$ $\Leftrightarrow 2x = -9$ $\Leftrightarrow x = -\frac{9}{2} \in I_1$	$3x + 3 = 2 - x + 4$ $\Leftrightarrow 4x = 3$ $\Leftrightarrow x = \frac{3}{4} \in I_2$	$3x + 3 = 2 + x - 4$ $\Leftrightarrow 2x = -5$ $\Leftrightarrow x = -\frac{5}{2} \notin I_3$

Svar: $x = -\frac{9}{2}, x = \frac{3}{4}$

2.a) Vi får

$$\sin\left(4x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(4x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 4x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \text{ eller } 4x + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \text{ eller } 4x = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{24} + n \cdot \frac{\pi}{2} \text{ eller } x = \frac{\pi}{8} + n \cdot \frac{\pi}{2}$$

Svar: $x = \frac{\pi}{24} + n \cdot \frac{\pi}{2}$ eller $x = \frac{\pi}{8} + n \cdot \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$

b) Trigonometriska ettan ger

$$\cos^2 v + \sin^2 v = 1 \Leftrightarrow \sin v = \pm\sqrt{1 - \cos^2 v}$$

och då $\pi < v < \frac{3\pi}{2}$ fås

$$\sin v = -\sqrt{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

som även ger

$$\cos 2v = \cos^2 v - \sin^2 v = \left(-\frac{1}{4}\right)^2 - \left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} - \frac{15}{16} = -\frac{14}{16} = -\frac{7}{8}.$$

Svar: $\sin v = -\frac{\sqrt{15}}{4}$, $\cos 2v = -\frac{7}{8}$

c) Vi får

$$\sin^2 x + \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow [\sin^2 x + \cos^2 x = 1] \Leftrightarrow 1 - \cos^2 x + \cos x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x - \cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow [t = \sin x, t \in [-1,1]] \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow t = -1, t = 2, t \in [-1,1] \Leftrightarrow t = -1$$

vilket ger

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow \cos x = \cos\pi \Leftrightarrow x = \pi + n \cdot 2\pi.$$

Svar: $x = \pi + n \cdot 2\pi, n \in \mathbb{Z}$.

3.a) Vi får att $z = 1 - i$ ger $\arg z = -\frac{\pi}{4}(+n \cdot 2\pi)$ samt $|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ som ger $z = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$.

Svar: $z = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$

b) Vi får $\frac{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{20}}{i} = \frac{\left(e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)^{20}}{e^{\frac{\pi}{2}i}} = e^{\left(\frac{40\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)i} = e^{\left(\frac{77\pi}{6}\right)i} = e^{\left(\frac{5\pi}{6}\right)i} = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$

Svar: $\frac{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{20}}{i} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

c) Vi får med $z = x + iy$

$$|z - (1 - i)| \geq |z - (3 + 3i)| \Leftrightarrow |x + iy - (1 - i)| \geq |x + iy - (3 + 3i)|$$

$$\Leftrightarrow |(x-1) + (y+1)i| \geq |(x-3) + (y-3)i| \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} \geq \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 \geq (x-3)^2 + (y-3)^2$$

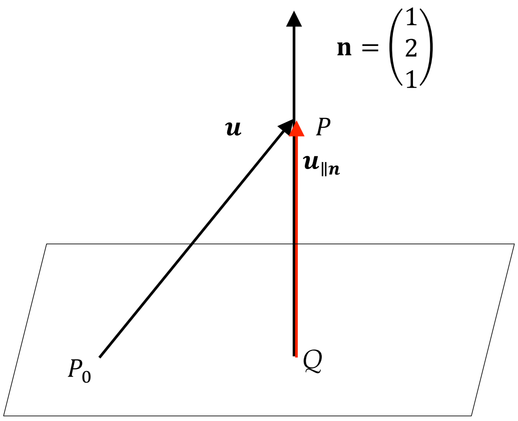
$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 \geq x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9$$

$$\Leftrightarrow 8y \geq -4x + 16 \Leftrightarrow y \geq -\frac{x}{2} + 2$$

vilket ger alla punkter på och ovanför linjen $y = -\frac{x}{2} + 2$.

Svar: Alla punkter på och ovanför linjen $y = -\frac{x}{2} + 2$.

4.a) Punkten P ligger ej i planet, ty $3 + 2 \cdot 5 + 2 = 15 \neq 3$. Vi ritar en figur. Det kortaste avståndet mellan punkten P och planet ges av $|\mathbf{u}_{\parallel\mathbf{n}}|$.



Vi väljer en punkt i planet, t.ex $P_0 = (3, 0, 0)$ och bildar vektorn $\boldsymbol{u} = \overline{P_0P} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Projektionsformeln ger

$$\mathbf{u}_{\parallel\mathbf{n}} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

som ger avståndet $|\mathbf{u}_{\parallel\mathbf{n}}| = 2\sqrt{6}$.

Svar: Det kortaste avståndet mellan punkten och planet är $2\sqrt{6}$ l.e.

b) För att få planets normal söker vi en vektor $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ sådan att

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + C = 0 \\ 2A + B + 4C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{matrix}\middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi låter $s = -1$ och en normalvektor $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Planets ekvation på normalform ger då $x + 2y - z = D$. Med punkten $(2, 3, 4)$ insatt i planets ekvation ger då $D = 2 + 6 - 4 = 4$, vilket ger planet $x + 2y - z = 4$.

Svar: $x + 2y - z = 4$

5.a) Vi får

$$e^{3x} + 3e^{2x} - 4e^{x} - 12 = 0 \Leftrightarrow [t = e^{x}, t > 0] \Leftrightarrow t^3 + 3t^2 - 4t - 12 = 0$$

och prövning ger att $t = 2$ är en rot till ekvationen. Faktorsatsen ger då att $t - 2$ är en faktor till polynomet i vänsterledet. Polynomdivision och faktorisering ger då

$$t^3 + 3t^2 - 4t - 12 = 0 \Leftrightarrow (t - 2)(t^2 + 5t + 6) = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow (t - 2)(t + 2)(t + 3) = 0.$$

$$\Leftrightarrow t = -3, t = -2, t = 2.$$

Med $t = e^{x}, t > 0$ fås då

$$e^{x} = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$$

ty $e^{x} = -3$ respektive $e^{x} = -2$ saknar lösning ty $e^{x} > 0$.

Svar: $x = \ln 2$

b) Definitionsmängden för ln ger

$$(1)\ x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$(2)\ x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$$

vilket ger $D_{\text{olikhet}} = \ ]1, \infty[\ \cap\ ]{-2}, \infty[\ =\ ]1, \infty[$.

Vi får då

$$2\ln(x - 1) \leq \ln(x + 2) + \ln 4\,, x \in\ ]1, \infty[\ \Leftrightarrow \ln(x - 1)^2 \leq \ln(4x + 8)\,, x \in\ ]1, \infty[$$

$$\Leftrightarrow [\text{lnfunktionen strängt växande}] \Leftrightarrow (x - 1)^2 \leq 4x + 8, x \in\ ]1, \infty[\ \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \leq 4x + 8, x \in\ ]1, \infty[$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x - 7 \leq 0, x \in\ ]1, \infty[\ \Leftrightarrow (x + 1)(x - 7) \leq 0, x \in\ ]1, \infty[$$

$$\Leftrightarrow [\text{Teckenschema}] \Leftrightarrow x \in [-1,7] \cap\ ]2, \infty[\ =\ ]1, 7].$$

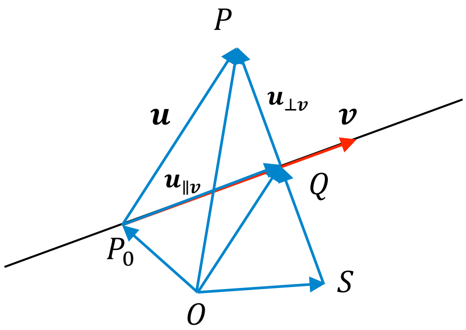
Svar: Olikheten har lösningsmängden $x \in\ ]1, 7]$.

6. Vi bestämmer först skärningslinjen mellan planen. Vi får

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5z = 5 \\ 4x - y - 3z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & 5 \\ 4 & -1 & -3 & 3 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & 5 \\ 12 & -3 & -9 & 9 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & 5 \\ 0 & -11 & 11 & -11 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi ritar en figur.



I) P: s ortogonala projektion Q på linjen sökes.

Vi konstaterar att origo ej ligger på linjen (sätt $s = 0$ i linjens ekvation). Vi bildar vektorn

$$\boldsymbol{u} = \overline{P_0P} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

.

Projektionsformeln ger

$$\boldsymbol{u}_{\parallel \boldsymbol{v}} = \overline{P_0Q} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{4}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vilket ger

$$\overline{OQ} = \overline{OP_0} + \overline{P_0Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{4}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/3 \\ 7/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

som ger projektionspunkten $\left(\frac{7}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

II) P: s spegelpunkt S i linjen sökes.

Vi får

$$\overline{OS} + 2\boldsymbol{u}_{\perp \boldsymbol{v}} = \overline{OP}$$

vilket ger

$$\overline{OS} = \overline{OP} - 2\boldsymbol{u}_{\perp \boldsymbol{v}} = \overline{OP} - 2(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{\parallel \boldsymbol{v}}) = \overline{OP} - 2\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{u}_{\parallel \boldsymbol{v}}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \frac{4}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/3 \\ 11/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

som ger spegelpunkten $\left(\frac{8}{3}, \frac{11}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

Svar: P: s ortogonala projektion på linjen är $\left(\frac{7}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right)$ och P: s spegelpunkt i linjen är $\left(\frac{8}{3}, \frac{11}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

7. Vi får D_f ur $\frac{e^x-5}{2-e^x} \geq 0$ vilket med teckenschema ger $D_f =]\ln 2, \ln 5]$.

Då fås

$$y = \sqrt{\frac{e^x - 5}{2 - e^x}}, x \in]\ln 2, \ln 5] \Leftrightarrow y^2 = \frac{e^x - 5}{2 - e^x}, x \in]\ln 2, \ln 5], y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow y^2(2 - e^x) = e^x - 5, x \in]\ln 2, \ln 5], y \geq 0 \Leftrightarrow 2y^2 - e^x y^2 = e^x - 5, x \in]\ln 2, \ln 5], y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2y^2 + 5 = e^x + e^x y^2, x \in]\ln 2, \ln 5], y \geq 0 \Leftrightarrow e^x(y^2 + 1) = 2y^2 + 5, x \in]\ln 2, \ln 5], y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{2y^2 + 5}{y^2 + 1}, x \in]\ln 2, \ln 5], y \geq 0 \Leftrightarrow x = \ln\frac{2y^2 + 5}{y^2 + 1}, y \geq 0.$$

Vi får alltså inversen $f^{-1}(x) = \ln\frac{2x^2+5}{x^2+1}$ med $D_{f^{-1}} = [0, \infty[$ och $V_{f^{-1}} =]\ln 2, \ln 5]$.

Svar: Den inversa funktionen ges av $f^{-1}(x) = \ln\frac{2x^2+5}{x^2+1}$ med $D_{f^{-1}} = [0, \infty[$ och $V_{f^{-1}} =]\ln 2, \ln 5]$.