# TNA001- Matematisk grundkurs
# Tentamen 2013-01-08 - Lösningsskiss

1. a)

Fall 1: $x \leq -2$ ger ekvationen $2(-x-2) = 3x + 3 - x \Leftrightarrow x = -\frac{7}{4}$, som inte duger.

Fall 2: $-2 \leq x \leq 3$ ger ekvationen $2(x+2) = 3x + 3 - x$ som saknar lösning.

Fall 3: $x \geq 3$ ger ekvationen $2(x+2) = 3x + x - 3 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$ som duger.

**Svar:** $x = \frac{7}{2}$

b)

$$2\sin^2 3x + \sin 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \sin 3x = -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}$$

Fall I: $\sin 3x = -1 \Leftrightarrow 3x = -\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + n\frac{2\pi}{3}$

Fall II: $\sin 3x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$ eller $3x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{18} + n\frac{2\pi}{3}$ eller $x = \frac{5\pi}{18} + n\frac{2\pi}{3}$

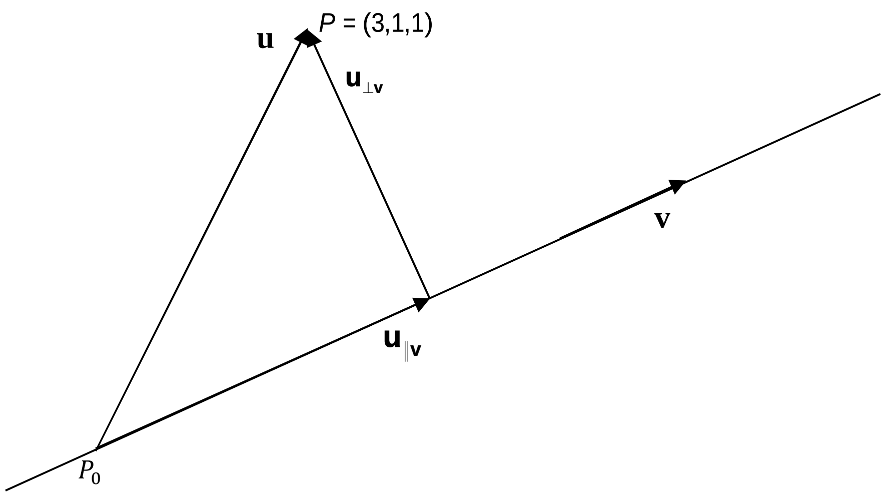
**Svar:** $x = -\frac{\pi}{6} + n\frac{2\pi}{3}$ , $x = \frac{\pi}{18} + n\frac{2\pi}{3}$ eller $x = \frac{5\pi}{18} + n\frac{2\pi}{3}$ , där $n \in \mathbb{Z}$.

2. a) Vinkeln mellan linjerna motsvaras av den minsta vinkeln mellan riktningsvektorerna. Om vinkeln är $\theta$ så har vi

$$\cos\theta = \frac{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

**Svar**: $\frac{\pi}{6}$

b) Vi konstaterar att punkten $P_0 = (1,1,0)$ ligger på den givna linjen, och ritar en figur (skiss) där vi har $\mathbf{u} = \overrightarrow{P_0P} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ och linjens riktningsvektor $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ .




Enligt figuren söker vi längden av vektorn $\mathbf{u}_{\perp\mathbf{v}}$ .Vi har av projektionsformeln att

$$\mathbf{u}_{\parallel\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v} = \cdots = \frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

vilket ger oss

$$\mathbf{u}_{\perp\mathbf{v}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\parallel\mathbf{v}} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

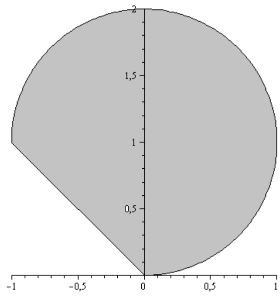
Sökt avstånd är $|\mathbf{u}_{\perp\mathbf{v}}| = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

**Svar:** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ l.e.

3. a)

$$\left(\frac{2i}{1-i}\right)^{18} = \left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}\right)^{18} = \frac{2^{18}e^{i9\pi}}{2^9e^{-\frac{9\pi}{2}}} = 2^9e^{i\frac{27\pi}{2}} = 2^9e^{i\left(12\pi+\frac{3\pi}{2}\right)} = 2^9e^{i\frac{3\pi}{2}} = -512i$$

**Svar:** $-512i$



b) Villkoret $|z-i| \leq 1$ innebär alla $z$ på eller innanför cirkeln med medelpunkt i (0,1) och radie = 1. Villkoret $0 \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{4}$ innebär alla $z$ som ligger på eller mellan strålarna 0 och $\frac{3\pi}{4}$. Sammantaget innebär det att den sökta snittmängden utgörs av alla komplexa tal $z$ som ligger i det skuggade området i figuren.

c) $|e^{ix}| = |\cos x + i\sin x| = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = \sqrt{1} = 1$ för alla $x \in \mathbb{R}$ medan $e^{ix} = 1 \Leftrightarrow x = n \cdot 2\pi$.
**Svar:** $x \in \mathbb{R}$ respektive $x = n \cdot 2\pi, n \in \mathbb{Z}$.

4. a) $\sqrt{3x-2}$ är definierat $\Leftrightarrow 3x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}$.
Vi har då

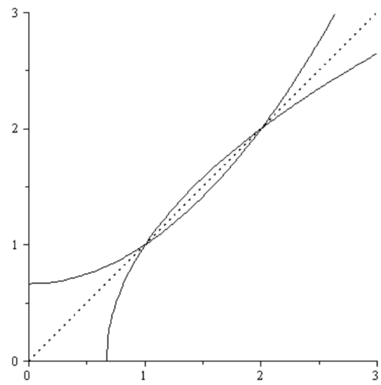
$$y = \sqrt{3x-2}, x \geq \frac{2}{3}, y \geq 0 \Leftrightarrow y^2 = 3x-2, x \geq \frac{2}{3}, y \geq 0 \Leftrightarrow x = \frac{y^2+2}{3}, y \geq 0$$

Vi har alltså inversen

$$f^{-1}(x) = \frac{x^2+2}{3}, x \geq 0$$

**Svar:** $f^{-1}(x) = \frac{x^2+2}{3}, x \geq 0$

b) Kurvorna skär varandra på linjen $y = x \Leftrightarrow f(x) = f^{-1}(x) = x, x \in D_f \cap D_{f^{-1}} = \left[\frac{2}{3}, \infty\right[$.



Det räcker alltså att lösa en av ekvationerna $\sqrt{3x-2} = \frac{x^2+2}{3}, x \geq \frac{2}{3}$ eller $\sqrt{3x-2} = x, x \geq \frac{2}{3}$ eller $\frac{x^2+2}{3} = x, x \geq \frac{2}{3}$. Här väljer vi den sistnämnda och får

$$\frac{x^2+2}{3} = x, x \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0, x \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = 1 \text{ eller } x = 2$$

Eftersom *x*- och *y*-koordinaterna är samma i skärningspunkterna så har vi att kurvorna skär varandra i punkterna (1,1) och (2,2). Se även figur.

**Svar:** Skärning i punkterna (1,1) och (2,2).

5. a) Vi söker alla nollställen till polynomet $x^3 - 3x - 2$ . Ett nollställe är $x = 2$ (prövning) vilket, enligt faktorsatsen, innebär att $x^3 - 3x - 2 = (x-2)k(x)$, där $k(x)$ fås via polynomdivisionen $k(x) = \frac{x^3-3x-2}{x-2}$. Vi får $k(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$. Alltså har vi

$$x^3 - 3x - 2 = (x-2)k(x) = (x-2)(x+1)^2$$

Kontroll: $(x-2)(x+1)^2 = (x-2)(x^2+2x+1) = x^3 + 2x^2 + x - 2x^2 - 4x - 2 = x^3 - 3x - 2$

**Svar:** $x^3 - 3x - 2 = (x-2)(x+1)^2$

b)

$$x^2 - 3 \leq \frac{2}{x} \Leftrightarrow x^2 - 3 - \frac{2}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^3-3x-2}{x} \leq 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{se a) uppgiften}} \frac{(x-2)(x+1)^2}{x} \leq 0$$

Sedvanligt teckenstudium (utförs inte här) visar att detta är uppfyllt $\Leftrightarrow x = -1$ eller $x \in ]0,2]$.

**Svar:** $x = -1$ eller $x \in ]0,2]$.

c) Olikhetens termer är alla definierade $\Leftrightarrow x > -2, x \neq 1$. För dessa värden på $x$ har vi

$$\ln(x-1)^2 + \ln(x+2) \leq 2\ln 2 \Leftrightarrow \ln((x-1)^2(x+2)) \leq \ln 4 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{ty ln är strängt väx}} (x-1)^2(x+2) \leq 4 \Leftrightarrow$$

$$x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 4x + x + 2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x - 2 \leq 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{se a) uppgiften}} (x-2)(x+1)^2 \leq 0$$

Teckenschema och termernas definitionsområde enligt ovan ger att den givna olikheten är uppfylld för alla $x \in \,]-2,1[\, \cup \,]1,2]$.

**Svar:** $x \in \,]-2,1[\, \cup \,]1,2]$

6. Vi inför beteckningarna $V(n)$ och $H(n)$ för respektive vänster- och högerled i påståendet

P(n): $V(n) = \sum_{k=1}^{n}(k^2-3k) = \dfrac{n(n+1)(n-4)}{3} = H(n)$

STEG 1: $P(1)$ : $V(1) = \sum_{k=1}^{1}(k^2-3k) = 1^2 - 3\cdot 1 = -2$ medan $H(1) = \dfrac{1(1+1)(1-4)}{3} = -2$

Alltså är $V(1) = H(1)$, d.v.s. $P(1)$ är sant.

STEG 2: Vi antar att $P(p)$ är sant för godtyckligt $p \in \mathbf{Z}^+$. d. v. s. vi antar att

$$V(p) = \sum_{k=1}^{p}(k^2-3k) = H(p) = \frac{p(p+1)(p-4)}{3}$$

Detta medför att

$$V(p+1) = \sum_{k=1}^{p+1}(k^2-3k) = \left(\sum_{k=1}^{p}(k^2-3k)\right) + ((p+1)^2 - 3(p+1)) =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{p}(k^2-3k)\right) + \left(p^2 - p - 2\right) = \text{/enligt antagandet/} = \frac{p(p+1)(p-4)}{3} + \left(p^2 - p - 2\right) =$$

$$= \frac{p(p+1)(p-4) + 3p^2 - 3p - 6}{3} = \frac{\left(p^2+p\right)(p-4) + 3p^2 - 3p - 6}{3} = \frac{p^3 - 7p - 6}{3}$$

och

$$H(p+1) = \frac{(p+1)(p+2)(p-3)}{3} = \frac{(p^2+3p+2)(p-3)}{3} = \frac{p^3-7p-6}{3}$$

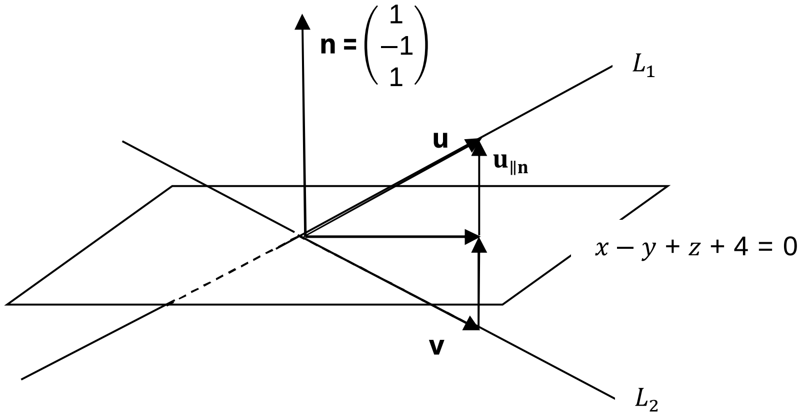
därav följer att även $P(p+1)$ är sant, d.v.s. vi har visat att $P(p)$ sant $\Rightarrow P(p+1)$ sant.

STEG 3: Eftersom $P(1)$ är sant måste enligt STEG 2 även $P(2)$ vara sant, men det innebär även att $P(3)$ är sant o. s. v. och vi kan, enligt induktionsprincipen, dra slutsatsen att

$\sum_{k=1}^{n}(k^2-3k) = \dfrac{n(n+1)(n-4)}{3}$ för alla $n \in \mathbb{Z}^+$, v.s.v.

7. Låt $L_1$ vara den givna linjen och låt $L_2$ vara $L_1$: s spegelbild i planet $x - y + z + 4 = 0$. Vi söker $L_2$: s riktning och en punkt på $L_2$. Riktningen $\mathbf{v}$ ges av (se figur)

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} - 2\mathbf{u}_{\|\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - 2\frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \cdots = \cdots = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$




Som punkt på $L_2$ väljer vi skärningspunkten mellan $L_1$ och planet, ty denna punkt ligger även på $L_2$. $L_1$: s ekvation insatt i planets ekvation ger villkoret

$$(1 + t) - (2 + 3t) + (3 - t) + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

som insatt i $L_1$: s ekvation ger skärningspunktens koordinater $(x, y, z) = (3{,}8{,}1)$.
Alltså är $L_2$ :s ekvation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

**Svar:** $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$