(5p) Uppgift 1

Företaget KONIA tillverkar mobiltelefoner I en stor fabrik med flera parallella produktionslinor. För att planera produktionen de kommande T veckorna har KONIA definierat följande icke-negativa och kontinuerliga beslutsvariabler.

x_{ijt} = antal mobiltelefoner av typ $i=1,\ldots,m$,
Som produceras på produktionslina $1,\ldots,n$,
Under vecka $t=1,\ldots,T$.

Formulera följande krav på produktionen som linjära bivillkor (du behöver inte skapa några nya variabler för att lösa de tre första deluppgifterna) att lägga till i KONIAs produktionsplaneringsmodell:

a) Under vecka 3–7 kommer produktionslina 1 vara stängd för all typ av produktion, pga. underhåll. (1p)

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=3}^{7} x_{i1t}=0$ andra varianter där summering ersätts med flera villkor är också korrekt.

b) Pga. ett strategiskt försäljningsbeslut måste exakt tre gånger så många telefoner av typ 2 som av typ 3, tillverkas varje vecka. (1p)

$$\sum_{j=1}^{n} x_{2jt}=3\cdot\sum_{j=1}^{n} x_{3jt},t=1,\ldots,T$$

c) Telefoner av typ 4, 5 och 6 är utrustade med en speciell typ av kamera. För den totala planeringsperioden finns inte fler än s sådana kameror tillgängliga. (1p)

$$\sum_{i=4}^{6}\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} x_{ijt}\le s$$

Följande uppgift kan kräva ytterligare *heltaliga variabler* och *linjära villkor.*

d) Pga. att ett särskilt verktyg krävs för att tillverka telefoner av typ 2, så kan denna typ av telefon endast produceras på tre produktionslinor under samma vecka. (2p)

Lägg till variabel $q_{jt}=1$ **om mobiltelefon av typ** 2
produceras på lina $j=1,\ldots,n$ **,**
under vecka $t=1,\ldots,T$ **, 0 annars**

Lägg till villkor:

$$x_{2jt}\le M q_{jt}, j=1,\ldots,n,t=1,\ldots,T$$

$$\sum_{j=1}^{n} q_{jt}\le 3,t=1,\ldots,T$$

Där *M* är ett stort tal.

(5p) Uppgift 2

Ett skogsindustriföretag transporterar trä från *m* terminaler (nära avverkningsområdena) till *n* kunder (företag som använder trä i sina produkter). Transportkostnaden från terminal *i* till kund *j* är c_{ij} per ton. Tillgången på trä vid terminal *i* är s_i ton och kund *j:s* efterfrågan är d_j.

LP-problemet nedan används av företaget för att planera sina trätransporter. Antalet ton trä som transporteras från terminal *i* till kund *j* är x_{ij}.

$$z = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

$$min$$

$$då \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le s_i, i=1,\dots,m \left(tillgång\right)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge d_j, j=1,\dots,n \left(efterfrågan\right)$$

$$x_{ij} \ge 0, i=1,\dots,m, j=1,\dots,n$$

Under den aktuella planeringsperioden ges *c*, *s* och *d* av:

$$c = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 17 & 8 & 11 \\ 5 & 7 & 14 & 16 & 12 \\ 2 & 8 & 13 & 12 & 10 \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} 700 \\ 850 \\ 900 \end{pmatrix} \quad , \quad d^T = \begin{pmatrix} 250 & 520 & 430 & 350 & 280 \end{pmatrix}$$

Följande output ges av AMPL när planeringsproblemet löses:

```
CPLEX 8.0.0: optimal solution; objective 15390

:       x  x.rc   x.down x.current   x.up      :=
1 1    60   0        2      3           3
1 2     0   3        7     10       1e+20
1 3     0   3       14     17       1e+20
1 4   350   0    -1e+20     8          13
1 5     0   0       11     11       1e+20
2 1     0   2        3      5       1e+20
2 2   520   0    -1e+20     7           9
2 3     0   0       14     14       1e+20
2 4     0   8        8     16       1e+20
2 5     0   1       11     12       1e+20
3 1   190   0        2      2           3
3 2     0   2        6      8       1e+20
3 3   430   0    -1e+20    13          13
3 4     0   5        7     12       1e+20
3 5   280   0    -1e+20    10          10
;

: demand.dual demand.down demand.current demand.up    :=
1      3          190           250          540
2      7            0           520          850
3     14          370           430          620
4      8            0           350          640
5     11          220           280          470
;
```

Svara på följande frågor med hjälp av utdata från AMPL:

a) På grund av vägbyggen har transporterna från terminal 1 till kund 4 blivit dyrare. De kostar nu 13 kostnadsenheter per ton. Hur påverkas företagets transportkostnader?

13 ligger i intervallet [x.down, x.up] **för variabeln x_{14}. Optimallösningen är därför oförändrad. Målfunktionsvärdet ökar dock med 350*(13-8).**

b) Transporten från terminal 2 till kund 4 är väldigt dyr. Ett annat företag har erbjudit sig att ta över den här transportsträckan till en kostnad på 10 konstnadsenheter per ton. Hur mycket skulle skogsindustriföretaget tjäna på att acceptera erbjudandet?

10 ligger i intervallet [x.down, x.up] **för variabeln x_{24}. Optimallösningen är därför oförändrad, likaså målfunktionsvärdet. Att målfunktionsvärdet är oförändrat beror på att $x_{24} = 0$ i optimallösningen.**

c) Kund 3:s efterfrågan minskar i volym med 100 ton. Hur påverkas företagets transportkostnader, i bästa och sämsta fall?

Notera att 430 – 100 = 330 < demand.down **för kund 3. I sämsta fall (för företaget) kommer transportkostnaderna minska med 60*14 = 840, i bästa fall 100*14 = 1400.**

(5p) Uppgift 3

Betrakta följande maximeringsproblem:

$max\, z = 4x_1 + x_2$
då $-2x_1 + x_2 \leq 2$ (bvk1)
$x_1 \leq 5$ (bvk2)
$x_1 + x_2 = 2$ (bvk3)
$x_1 \geq 0, x_2 \leq 0$

a) Formulera problemet på standardform. (1p)
Inför slackvariabler för bvk 1 och 2, samt variabelsubstitutionen $x_2 = -y_2$

$max\, z = 4x_1 - y_2$
då $-2x_1 + y_2 + s_1 = 2$ **(bvk1)**
$x_1 + s_2 = 5$ **(bvk2)**
$x_1 - y_2 = 2$ **(bvk3)**
$x_1 \geq 0, y_2 \geq 0$

b) Formulera dualen till det ursprungliga problemet ovan. (1p)

$min\, w = 2v_1 + 5v_2 + 2v_3$
då $-2v_1 + v_2 + v_3 \geq 4$
$v_1 + v_3 \leq 1$
$v_1, v_2 \geq 0\ v_3\ fri$

c) Illustrera optimeringsproblemet grafiskt.
- **i)** Illustrera det tillåtna området
- **ii)** Illustrera målfunktionen för målfunktionsvärdet 0
- **iii)** Baserat på din illustration, bestäm optimallösning och optimalt målfunktionsvärde
(3p)

Notera att $x_2 \leq 0$ och att bvk. 3 är ett likhetsvillkor. Det tillåtna området utgörs av en linje.

(5p) Uppgift 4

Denna deluppgift består av ett antal frågor kring antingen Simplexmetoden i allmänhet eller ett specifikt problem i synnerhet. Besvara frågorna kortfattat. Ingen ytterligare motivering krävs. Korrekt svar ger +1p och felaktigt svar ger -1p för respektive deluppgift. En obesvarad deluppgift ger 0p. Uppgiften kan som helhet inte ge mindre än 0p.

Observera: i deluppgifterna d) och e) har poäng getts för korrekt valda inkommande och utgående variabler samt korrekt svar om optimalitet. Räknefel i målfunktionsvärdet har bortsetts från.

a) I simplexmetoden måste man alltid välja den variabel med störst negativ (för min-problem) reducerad kostnad, om det finns flera variabler med negativ reducerad kostnad, för att metoden ska leda till att optimallösningen hittas.

   Falskt. Vi kan även tänka oss att välja andra variabler som inkommande, så länge de har en negativ reducerad kostnad.

b) Alla maximeringsproblem kan formuleras om till minimeringsproblem och därmed lösas som minimeringsproblem.

   Sant.

c) Antag att vi ställ upp en initial simplextablå för ett problem för vilket origo är en tillåten lösning. Vad vet vi om målfunktionsvärdet i initialtablån när vi använder origo som initialt tillåten baslösning?

   Målfunktionens värde i origo är 0.

För deluppgift d och e utgår frågorna från simplextablån nedan.

Ett optimerings problem (maximeringsproblem) löses med simplex på tablåform, och följande tablå har erhållit.

	z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	b
z	1	-2	*a*	0	5	0	-3	0	15
X_5	0	1	2	0	1	1	-2	0	*b*
X_3	0	0	0	1	0	0	1	0	5
X_7	0	2	2	0	0	0	-1	1	8

d) Låt *a* anta värdet -5 och *b* värdet 10. Vilka är de inkommande respektive utgående variablerna i nästa iteration av Simplexmetoden? Vad blir det nya målfunktionsvärdet? Har vi nått optimum?

   Inkommande: x_2

   Utgående: x_7

Nytt målfunktionsvärde efter en iteration: 35.

Vi har inte nått optimum.

e) Om vi istället låter *a* anta värdet -1 och *b* 3, vilka är de inkommande respektive utgående variablerna i nästa iteration av Simplexmetoden? Vad blir det nya målfunktionsvärdet? Har vi nått optimum?

Inkommande: x_6

Utgående: x_3

Nytt målfunktionsvärde efter en iteration: 30.

Vi har inte nått optimum.

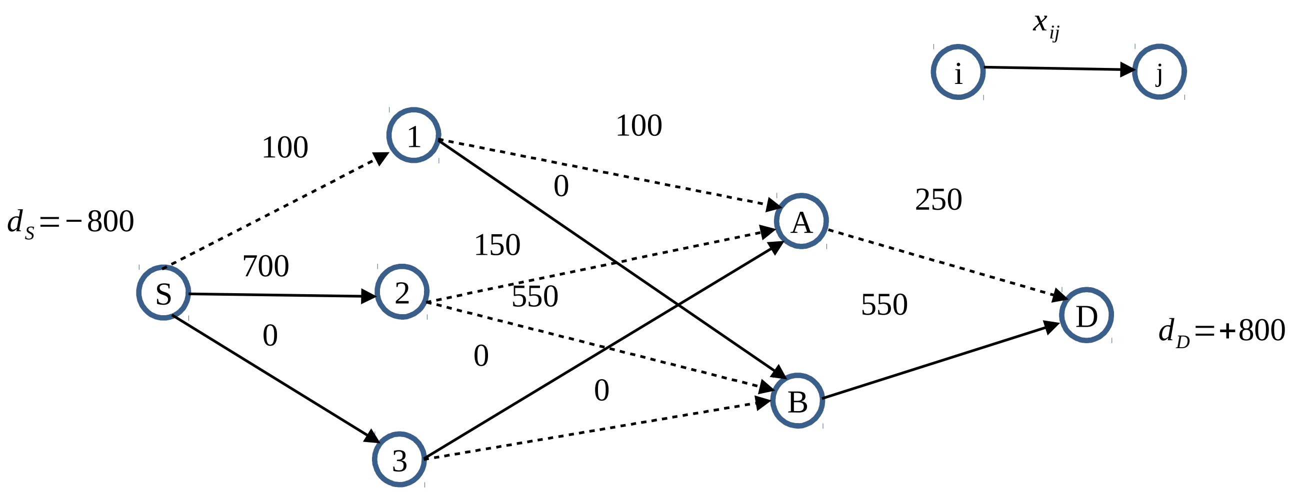
(5p) Uppgift 5

Ett företag I Uganda producerar mangojuice i två fabriker, A och B. Produktionskapaciteten är 450 respektive 550 liter per vecka, och produktionskostnaden är 1500 UGX/liter respektive 1000 UGX/liter (UGX = Ugandisk shilling). För den kommande veckan erbjuder tre mangoodlare färsk frukt till företaget. De erbjuder 300 kg, 700 kg respektive 500 kg var, till priserna 300, 200 och 350 UGX/kg. I fabriken mixas frukten med filtrerat vatten, och 1kg frukt ger 1kg juice. Transportkostnaden (i UGX/kg) mellan odlare och fabrik ges i tabellen nedan.

	Till fabrik A	**Till fabrik B**
Från odlare 1	100	150
Från odlare 2	200	130
Från odlare 3	230	100

Företaget hare n efterfrågan på 800 liter mangojuice den kommande veckan.

Den kommande veckans produktions- och transportproblem har formulerats som en minkostandsflödesproblem nedan. I nätverket visas endast nodstyrkor för noder som hare n positive eller negative styrka.



a) I nätverket ovan är inga flöden angivna. Bestäm ett tillåtet basflöde i nätverket, och avgör om flödet är optimal eller inte. Ange också målfunktionsvärdet för ditt valda flöde. (3p)

Det finns många olika lösningar som alla är rätt till denna uppgift. Viktigt i alla lösningar är att ange flödes som uppfyller nodbalanser samt undre gräns (0) samt övre gräns (bågdata). Dessutom ska det gåt att ta fram ett basträd från de valda flödena. I nätverket ovan är ett exempel på tillåtet basflöde angivet, med basbågar som streckade linjer.

Ta därefter fram nodpriser och undersök optimalitet med optimalitetsvillkor. (Görs ej här eftersom det är beroende på vilket flöde som togs fram i första delen på uppgifterna och skiljer sig mellan individuella lösningar)

b) Det finns en begränsad transportkapacitet från odlarna (totalt för samtliga odlare) till respektive fabrik. Den totala transportkapaciteten in till fabrik A är 400kg och in till fabrik B är den 600kg. Gör förändringar i modellen som tar hänsyn till den nya informationen. (2p)

Notera att max inkapacitet till fabrik A är samma sak som att säga att på båge AD kan det max gå 400, samt för fabrik B, BD max 600. För BD begränsar nuvarande kapacitet mer, och ingen förändring behöver göras. För AD sätts övre begränsning till 400. Det går även att lösa uppgiften med hjälpnoder som inflöde till respektive fabrik passerar.