Linköpings universitet
Institutionen för teknik och naturvetenskap
Michael Hörnquist

Statistik och sannolikhetslära, TNIU66

Tentamen, 7 juni 2021, Svar och lösningsskisser

1. (a) Medelvärdet kan fås $(17 \cdot 5 + 15 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 1)/39 \approx 4,15$. (b) Medianvärdet är det mittersta värdet, dvs värde nummer $(39+1)/2 = 20$. Det 20:e värdet är 4. (c) Populationsstandardavvikelsen ges av $\sqrt{(17(5-4,15)^2 + 15(4-4,15)^2 + 5(3-4,15)^2 + 2(1-4,15)^2)/39} \approx 1,001$. Stickprovsstandardavvikelsen ges på motsvarande sätt av $\sqrt{(17(5-4,15)^2 + 15(4-4,15)^2 + 5(3-4,15)^2 + 2(1-4,15)^2)/(39-1)} \approx 1,014$.

2. (a) Endast f_1 duger som täthetsfunktion, den uppfyller både $f_1(x) \geq 0$ för alla x och $\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\,dx = 1$. Funktionen f_2 tar negativa värden medan ingen av övriga funktioner integrerar till 1, dvs $\int_{-\infty}^{\infty} f_i(x)\,dx \neq 1$ för $i = 3,4,5$. (b) $\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x)\,dx = 0$, $\sigma = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x)\,dx - \mu^2} = \sqrt{5/96} \approx 0,228$.

3. (a) Vi har slumpvariabel $X \sim N(\mu = 100, \sigma = 15)$. $\Pr(X > 120) = \Pr(Z > (120-100)/15) = 1 - \Pr(Z < 1,33) = 0,09176$. (b) Nu har vi X_1, X_2, X_3 oberoende slumpvariabler fördelade på samma sätt som X ovan. Då blir $Y = (X_1 + X_2 + X_3)/3 \sim N(\mu_Y = \mu, \sigma_Y = \sigma/\sqrt{3}) = N(\mu_Y = 100, \sigma_Y = 8,66)$. Då blir $\Pr(Y > 120) = \Pr(Z > (120-100)/8,66) = 1 - \Pr(Z < 2,31) = 0,01044$.

4. (a) Punktskattningen är $p = 8/40 = 0,20$. Med $n = 40$, stickprovet draget som ett OSU och $np(1-p) = 6,4 > 5$ följer att vi kan använda vår vanliga metodik. Konfidensnivån 90% ger $1 - \alpha = 0,90$ och från tabell $z_{1-\alpha/2} = z_{0,95} = 1,645$. Dubbelsidigt konfidensintervall fås som $p \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{p(1-p)/n}$ vilket till sist ger intervallet $0,096 < \pi < 0,304$ för den sanna andelen π som skulle rösta på Piratpartiet. (b) Felmarginalen är det som står efter "$\pm$" i uttrycket ovan, och påverkas med andra ord inte av populationens storlek. Miriam och Roger kan därmed fortsätta med samma stickprovsstorlek.

5. Här har vi att göra med en enkelsidig hypotesprövning för poplulationsandel. Stickprovet är draget som ett OSU och har storleken $n = 400$, punktskattningen är $p = 34/400 = 0,085$, vilket ska jämföras med resultatet i senaste valet $\pi_0 = 0,07$. Eftersom det är en enkelsidig prövning, vi vill veta om p är så pass mycket större än π_0 att ökningen är statistiskt säkerställd, så sätter vi nollhypotesen till $H_0 : \pi = \pi_0$ och mothypotesen till $H_a : \pi > \pi_0$. Eftersom $np(1-p) = 31,1 > 5$ kan vi använda vår vanliga metod och beräknar testvariabeln $z = (p - \pi_0)/\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)/n} = 1,1758$. Denna ska eftersom signifkansniån $\alpha = 0,10$ jämföras med tabellvärdet $z_{1-\alpha} = 1,282$. Eftersom $z < z_{1-\alpha}$ följer att nollhypotesen *inte* kan förkastas, och därmed att Piratpartiets ökning *inte* är statistiskt säkerställd (på nivån 10%).

6. (a) Riktningskoefficienten b_1 är lutningen för kurvan, k-värdet i räta linjens ekvation, och kan ta vilket värde som helst ($-\infty < b_1 < \infty$). Här blir då $b_1^{(1)} < b_1^{(2)} < b_1^{(4)} < b_1^{(3)}$ (faktiska värden $-1,0 < -0,1 < 1,0 < 2,0$). (b) Korrelationskoefficienten r uppfyller alltid $-1 \leq r \leq 1$ och dess absolutbelopp $|r|$ är ett mått på hur väl punkterna ligger längs en rät linje. Det gäller att $r < 0$ om riktningskoefficienten $b_1 < 0$ och motsvarande $r > 0$ om $b_1 > 0$. Här blir då $r^{(2)} < r^{(1)} < r^{(3)} < r^{(4)}$ (faktiska värden $-0,9982 < -0,8386 < 0,3019 < 0,9986$).