Svar till tentamen i TNA006, 140108

1. Låt $F(x,y,z) = z - \cos(xyz)$, då är en normalvektor till tangentplanet i punkten $(1,1,\frac{\pi}{2})$
$$\nabla F(1,1,\frac{\pi}{2}) = (\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},2)$$
Svar: Tangentplanet är $\pi x + \pi y + 4z = 4\pi$.

2. Låt $F(x,y,z) = x^2 + y^2$ och $G(x,y,z) = y^2 + z^2$. Då är gradienterna $\nabla F(-1,1,1)$ och $\nabla G(-1,1,1)$ normalvektorer till respektive yta, och även till skärningskurvan. En tangentvektor till skärningskurvan är då
$$\nabla F(-1,1,1) \times \nabla G(-1,1,1) = (-2,2,0) \times (0,2,2) = (4,4,-4)$$
Svar: En tangentektor till skärningskurvan är $(1,1,-1)$.

3. Volymen är
$$V = \iint_D \left(\frac{4}{3} - \frac{x^2+y^2}{3} - x^2 - y^2\right) dxdy = \frac{4}{3}\iint_D \left(1 - -x^2 - y^2\right) dxdy$$
Integrationsområdet fås ur skärningen mellan ytorna, vilket ger att $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, x^2 + y^2 \le 1\}$. Efter byte till polära koordinater:
$$V = \frac{4}{3}\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (r - r^3) d\theta\right) dr = \frac{8\pi}{3}\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{3}.$$
Svar: Volymen är $\frac{2\pi}{3}$

4. Vi har en kontinuerlig funktion och en kompakt mängd, således kommer f att anta max och min.

   Stationära punkter: $\nabla f = 0$ ger oss
$$\begin{cases} f'_x &= &= (1 - 2x(x+y))e^{-x^2-y^2} = 0 \\ f'_y &= &= (1 - 2y(x+y))e^{-x^2-y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'_x &= &= 1 - 2x(x+y) = 0 \\ f'_y &= &= 1 - 2y(x+y) = 0 \end{cases}$$
   Ur detta får vi att $2(x-y)(x+y) = 0$ alltså måste $x = y$ eller $x = -y$.

   Med $x = y$ får vi $1 = 4x^2$ som ger att $(x,y) = \pm(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

   Med $x = -y$ får vi $1 = -4x^2$ som saknar reell lösning.

   Singulära punkter Saknas då f deriverar överallt.

   Randen: Randen är enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$ vi kan parametrisera randen med polära koordinater: vi får
$$g(t) = f(\cos t, \sin t) = (\cos t + \sin t)e^{-1}, \quad g'(t) = (-\sin t + \cos t)e^{-1},$$

Vilket ger oss att max/min på randen inträffar då $\sin t = \cos t$, vilket sker då $t = \frac{\pi}{4}$ och $t = \frac{5\pi}{4}$. Detta motsvarar $(x, y) = \pm(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

Sammanfattning: Max/min kommer att antas i någon av följande punkter:

$$f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = e^{-1/4}, \quad f(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = -e^{-1/4},$$

$$f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}e^{-1}, \quad f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\sqrt{2}e^{-1}.$$

Svar: Största värdet är $e^{-1/4}$ som antas i $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, Minsta värdet är $-e^{-1/4}$ som antas i $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

5. Låt $F(x, y, z) = e^{yz} - x^2 z \ln y$, eftersom $F'_z(1, 1, 1) = e \neq 0$ så definierar ekvationen z som en funktion av x och y i någon omgivning av $(1, 1, 1)$, (vi ser också att $F(1, 1, 1) = e$). Vi får också direkt att $z(1, 1) = 1$.

   Implicit derivering på x ger att

$$yz'_x e^{yz} - 2xz \ln y - x^2 z'_x \ln y = 0$$

   I $(1, 1, 1)$ får vi

$$z'_x(1, 1)e = 0$$

   Alltså är $z'_x(1, 1) = 0$.

   Implicit derivering på y ger att

$$(z + yz'_y)e^{yz} - \frac{x^2 z}{y} - x^2 z'_y \ln y = 0$$

   I $(1, 1, 1)$ får vi

$$(1 + z'_y(1, 1))e - 1 = 0$$

   Alltså är $z'_y(1, 1) = \frac{1}{e} - 1$.

   Svar: $z(1, 1) = 1$, $z'_x(1, 1) = 0$ och $z'_y(1, 1) = \frac{1}{e} - 1$.

6. Kedjeregeln ger att

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}z'_u + z'_v$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z'_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{x^2}z'_u + z'_v\right) = 2\frac{y}{x^3}z'_u - \frac{y}{x^2}\left(\frac{\partial z'_u}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z'_u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right) +$$

$$+\left(\frac{\partial z'_v}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z'_v}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 2\frac{y}{x^3}z'_u - \frac{y}{x^2}\left(-\frac{y}{x^2}z'_{uu} + z'_{uv}\right) +$$

$$+\left(-\frac{y}{x^2}z'_{vu}+z'_{vv}\right)=2\frac{y}{x^3}z'_u+\frac{y^2}{x^4}z'_{uu}-2\frac{y}{x^2}z'_{uv}+z''_{vv}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial z'_x}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2}z'_u+z'_v\right)=-\frac{1}{x^2}z'_u-\frac{y}{x^2}\left(\frac{\partial z'_u}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z'_u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)+$$

$$+\left(\frac{\partial z'_v}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z'_v}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-\frac{1}{x^2}z'_u-\frac{y}{x^2}\left(\frac{1}{x}z'_{uu}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{x}z'_{vu}\right)=-\frac{1}{x^2}z'_u-\frac{y}{x^3}z'_{uu}+\frac{1}{x}z'_{uv}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{x}z'_u$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial z'_y}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x}z'_u\right)=\frac{1}{x}\left(\frac{\partial z'_u}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z'_u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}z'_{uu}\right)=\frac{1}{x^2}z''_{uu}.$$

Detta i PDEn ger oss:

$$x^2z''_{xx}+2xyz''_{xy}+y^2z''_{yy}=$$

$$x^2\left(2\frac{y}{x^3}z'_u+\frac{y^2}{x^4}z'_{uu}-2\frac{y}{x^2}z'_{uv}+z''_{vv}\right)+2xy\left(-\frac{1}{x^2}z'_u-\frac{y}{x^3}z'_{uu}+\frac{1}{x}z'_{uv}\right)+\frac{y^2}{x^2}z''_{uu}=\frac{y^2}{x^2}z''_{uu}.$$

Den PDEn vi har fått är då $x^2z''_{vv}=4x^2$ eller $z''_{vv}=4$. Lösning är $z=2u^2+ug(v)+h(v)$.

Svar: Lösning är $z(x,y)=2x^2+xg(\frac{y}{x})+h(\frac{y}{x})$, där g och h godtyckliga deriverbara funktioner.

7. Om vi antar att kurvan är $y=y(x)$ kan den beskrivas som $\boldsymbol{r}(x)=(x,y(x))$, vi vet då att en tangentvektor till kurvan är $\boldsymbol{r}'(x)=(1,y')$. Nivåkurvor till $f(x,y)$ i en punkt (x,y) har normalvektor $\nabla f(x,y)=(4x^3,2y)$. Om nu kurvan skall skära nivåkurvor under rät vinkel måste dessa vektorer vara parallella. Detta ger os en differentialekvation

$$\frac{y'}{1}=\frac{2y}{4x^3}\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x^3}\Leftrightarrow 2\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x^3}\Leftrightarrow\ln y^2=\frac{1}{-2x^2}+c$$

Svar: Kurvan blir $y^2=Ce^{\frac{1}{-2x^2}}$