TNSL05 – Optimering, Modellering och Planering

Föreläsning 6

LINKÖPINGS UNIVERSITET

Agenda

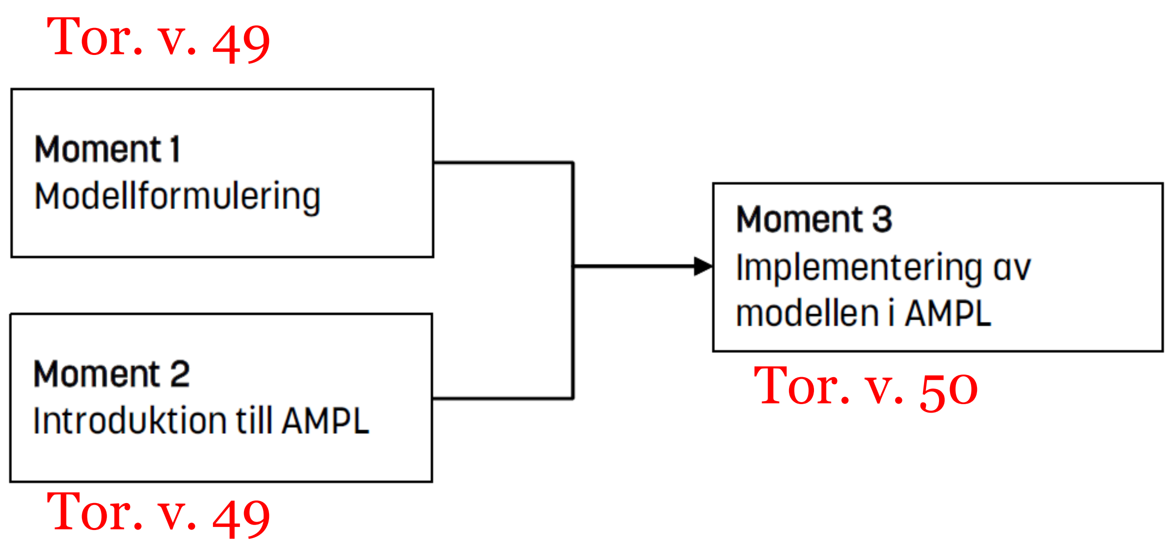
- Kursens status
- Tolkning av utdata
- Intro lösningsmetoder
- Linjära optimeringsproblem (LP) på standardform
- Algebraisk formulering av LP
- Konvexitet

Kursens status

- Föreläsning (1), 2-5: Modellering
- Föreläsning 6-10, (11): Lösningsmetod/känslighetsanalys
- Gruppuppgifter:
  - Gruppuppgift 1:
    - Redovisas muntligt v. 48. Uppgiften och en anmälningslista ligger på Lisam.
  - Gruppuppgift 2:
    - Redovisas muntligt v. 50. Uppgiften och en anmälningslista kommer läggas upp på Lisam under v. 48.
  - Gruppuppgift 3:
    - Redovisas skriftligt senast fredagen v. 51. Uppgiften och en anmälningslista kommer läggas upp på Lisam under v. 48

Kursens status

- Laborationsmomentet:
  - Anmälningslistan ligger ute. Skriv upp er!
  - Läs redan nu labbinstruktionen som ligger på Lisam!



Hittills

- Föreläsning 1: kursadministration, intro: Vad är matematisk modellering?, historia, tillämpningsexempel, komplexitet
- Föreläsning 2: summering och index, matematisk modellering
- Föreläsning 3: matematisk modellering, LP
- Föreläsning 4: matematisk modellering, HP
- Föreläsning 5: matematisk modellering, nätverk

Idag

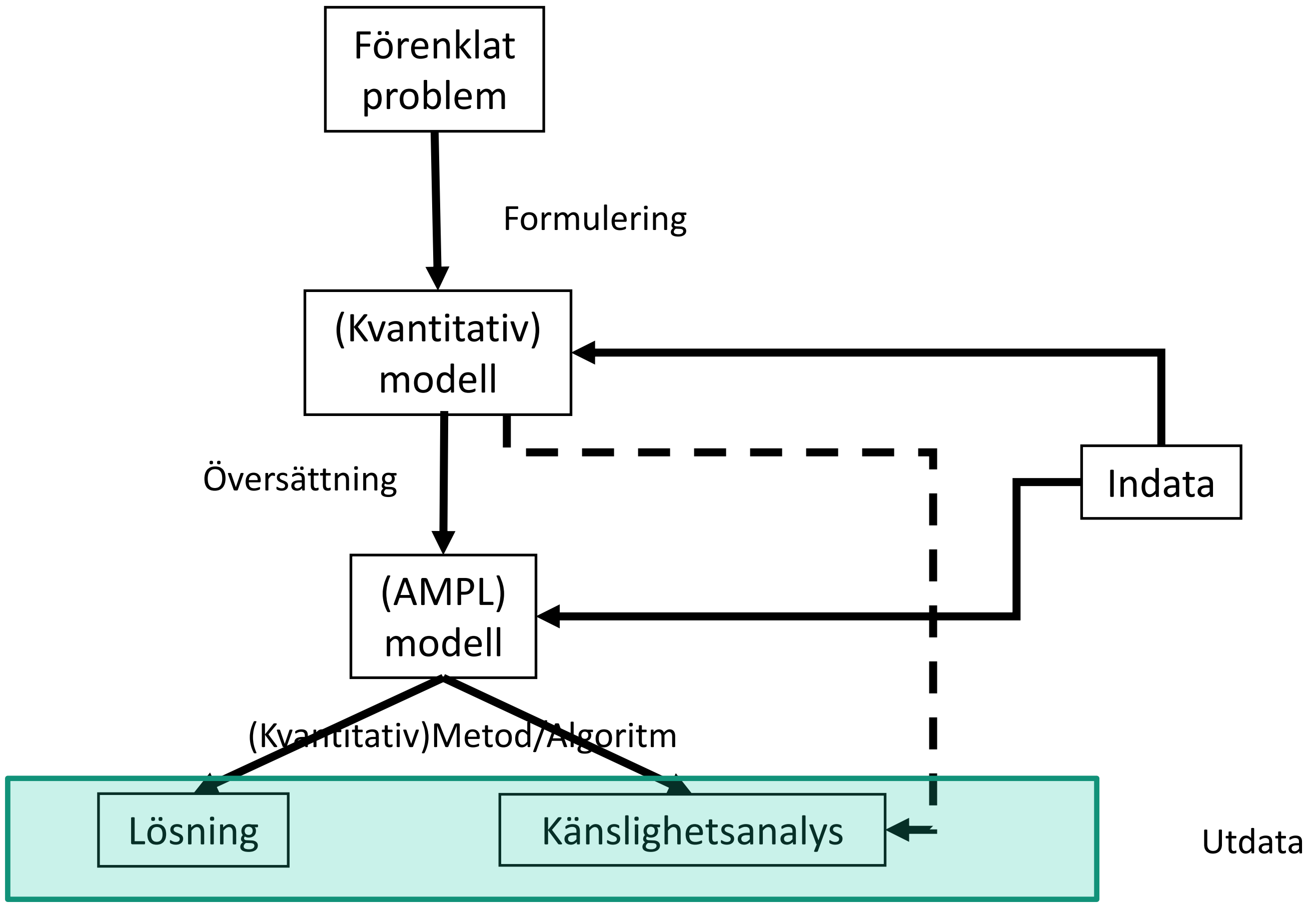
Studenten ska efter avslutad kurs kunna:

- Analysera och formulera optimeringsmodeller inom ekonomiska tillämpningsområden
- Analysera och dra slutsatser från känslighetsanalys för linjära optimeringsproblem och optimeringsproblem med nätverksstruktur
- Förklara den grundläggande matematiska teorin på vilka modeller och algoritmer bygger
- Dra slutsatser från optimeringsmetoder för linjära optimeringsproblem (Simplexmetoden) samt för optimeringsproblem med nätverksstruktur (Simplex för minkostnadsflödesproblem och Dijkstras algoritm för billigasteväg problem)

Agenda

- Tolkning av utdata
- Intro lösningsmetoder
- Linjära optimeringsproblem (LP) på standardform
- Algebraisk formulering av LP
- Konvexitet

Kvantitativa metoder/modellering



Tolkning utdata

- Utdata är (naturligtvis) oftast
  - Optimalt målfunktionsvärde
  - Optimala värden på variabler (optimallösningen)
- Jämför två utdata med olika indata kan ge svar
  - T.ex.
    - Vad tjänar vi på om …
    - Hur förändras lösningen om …
    - Etc.

Tolkning utdata

- Utdata kan också ge en mängd annan information
  - Hur ”stabil” är lösningen
  - Vad händer vid (mindre, enstaka) förändringar
- Detta kallas vanligtvis känslighetsanalys
  - Oftast en biprodukt av lösningen
    - Marginell ytterligare databehandling
  - Praktiskt intressant i stora/gigantiska problem

Linus, igen

”Linus har kommit på att pannkakor och sockerkakor säljer bra i Norrköping. En pannkaka ger honom 8 kronor i vinst och en sockerkaka 15 kronor. En pannkaka tar 4 minuter att göra, medan en sockerkaka tar 10 minuter.

Eftersom Linus även studerar på universitetet, har han högst 2 timmar varje dag i sin firma. Hemligheten bakom hans goda pannkakor och sockerkakor är äggen han köper av en bonde i Askeby, och saltet hämtas ur Gullmarsfjorden.

Bonden kan bara sälja 20 ägg per dag till Linus. Varje sockerkaka kräver 2 ägg och varje pannkaka 1/3 ägg. Formulera Linus (vinstmaximerings)problem! Det nordliga klimatet gör att han bara kan få fram 20 kryddmått salt per dag. Varje pannkaka innehåller ett kryddmått salt”

Känslighetsanalys

- Bakproblemet
  - Optimallösning: 20 pannkakor, 4 sockerkakor
  - Optimalt målfunktionsvärde: 220 kr
  - Optimalt målfunktionsvärde om +20 minuter
    - 250 kr
      - Dvs ”värde/beredd betala” (250-220)/20=1.5/minut
  - Optimalt målfunktionsvärde om ytterligare +20 minuter
    - 260 kr
      - Dvs ”värde/beredd betala” (260-250)/20=0.5/minut
  - Optimalt målfunktionsvärde om ytterligare 1 miljard minuter
    - 260 kr!

```
CPLEX 11.0.1: sensitivity
CPLEX 11.0.1: optimal solution; objective 220
1 dual simplex iterations (1 in phase I)

suffix up OUT;
suffix down OUT;
suffix current OUT;
vinst = 220

:            antal    antal.rc    antal.down antal.current antal.up
:=
pannkaka      20     4.44089e-16      6          8          1e+20
sockerkaka     4     0                0         15             20
;
```

Optimalt målfunktionsvärde

Lösning

Aktuell målfknkoeff

- Reducerad kostnad (rc) i opt
- variabelvärde*rc=0
- Vi kommer tillbaka till rc lite senare…

Intervall målfknkoeff med bibehållen lösning (dvs samma värden på variablerna)

```
CPLEX 11.0.1: sensitivity
CPLEX 11.0.1: optimal solution; objective 150
1 dual simplex iterations (1 in phase I)

suffix up OUT;
suffix down OUT;
suffix current OUT;
vinst = 150

:              antal    antal.rc   antal.down antal.current antal.up
:=
pannkaka        0        -0.5         -1e+20          2      2.5
sockerkaka     10         0            12            15      1e+20
;
```

Om vinsten för en pannkaka bara är 2kr

- rc: marginalförändring av målfunktionen om `pannkaka`>0
- För att vi ska vilja baka pannkakor måste vinsten öka med minst 0.5 per pannkaka

```
CPLEX 11.0.1: sensitivity
CPLEX 11.0.1: optimal solution; objective 220
1 dual simplex iterations (1 in phase I)
```

Slack=Tillgänglig (outnyttjad) resurs

(HL = Högerled)

Om vinsten för en pannkaka är 8kr (som i ursprungsmodellen)

Dual= Förändrat målfknvärde per enhets ökning av HL

- Intervall HL med bibehållen samma villkor begränsande, dvs med oförändrat dualvärde
- Dock naturligtvis förändrad lösning om slack=0

Aktuellt HL

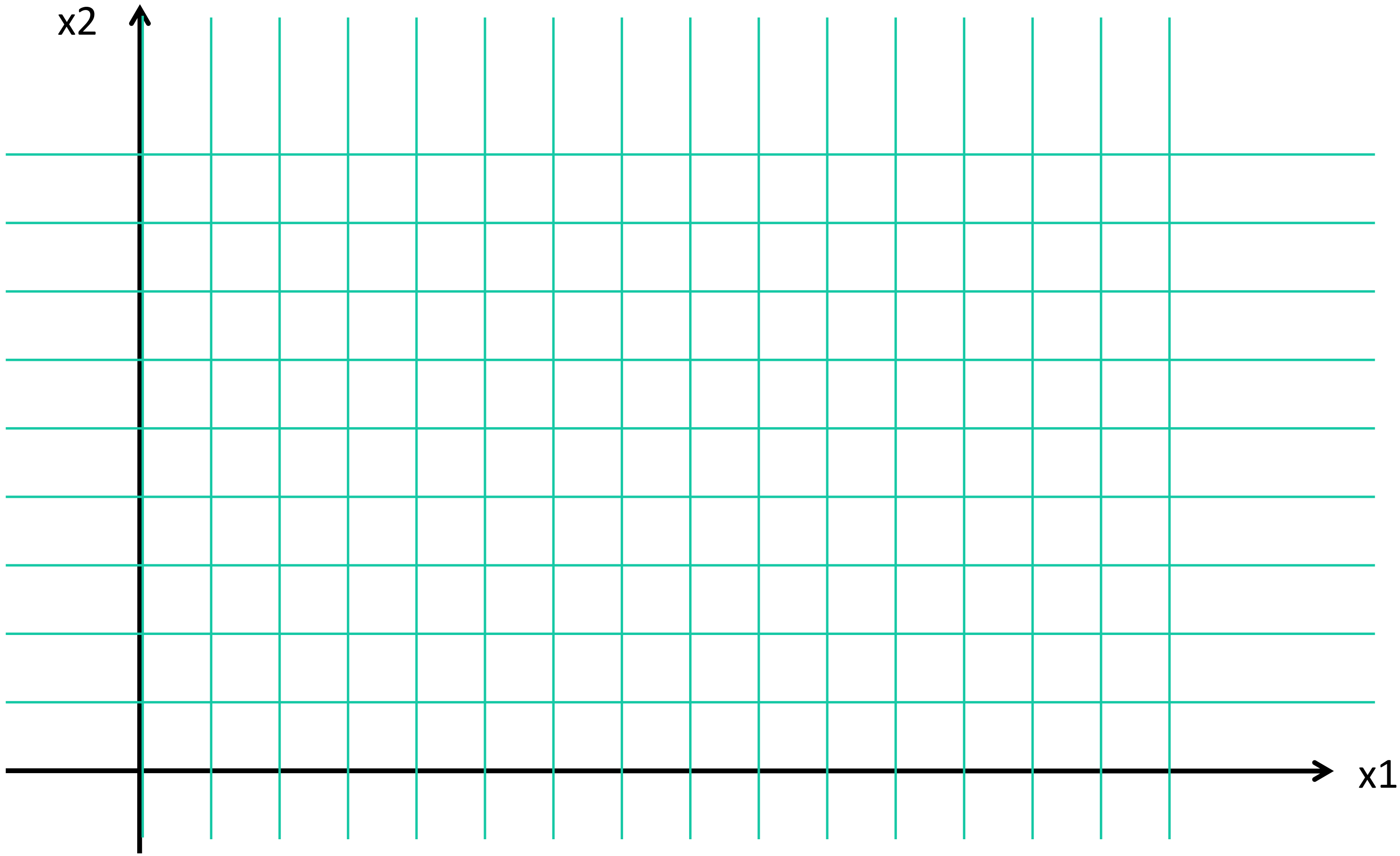
```
:     biv.slack biv.dual   biv.down biv.current    biv.up      :=
agg       16        0      44              60      1e+20
salt       0        2       8.57143        20         30
tid        0        1.5    80             120        146.667
;
```

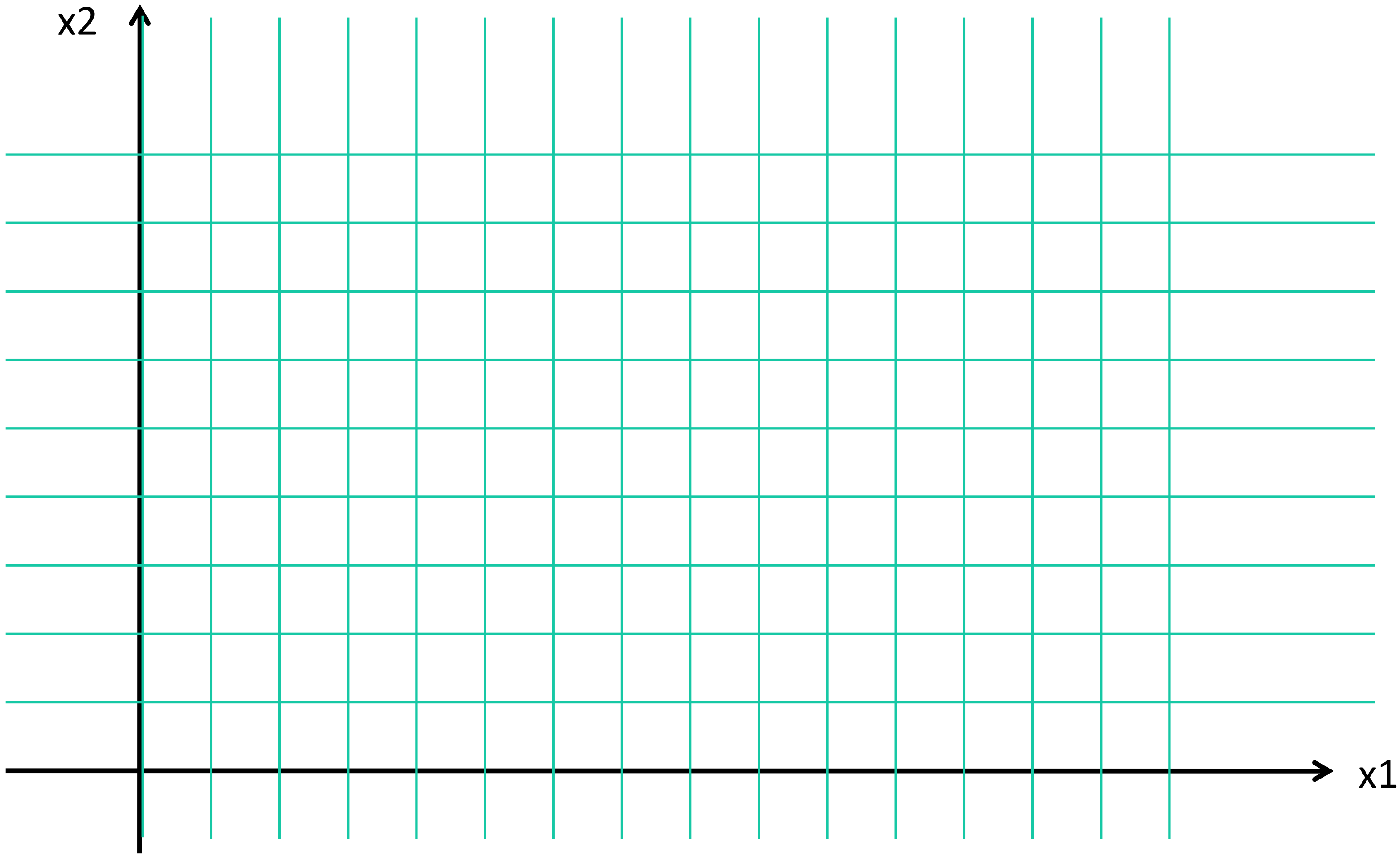
Agenda

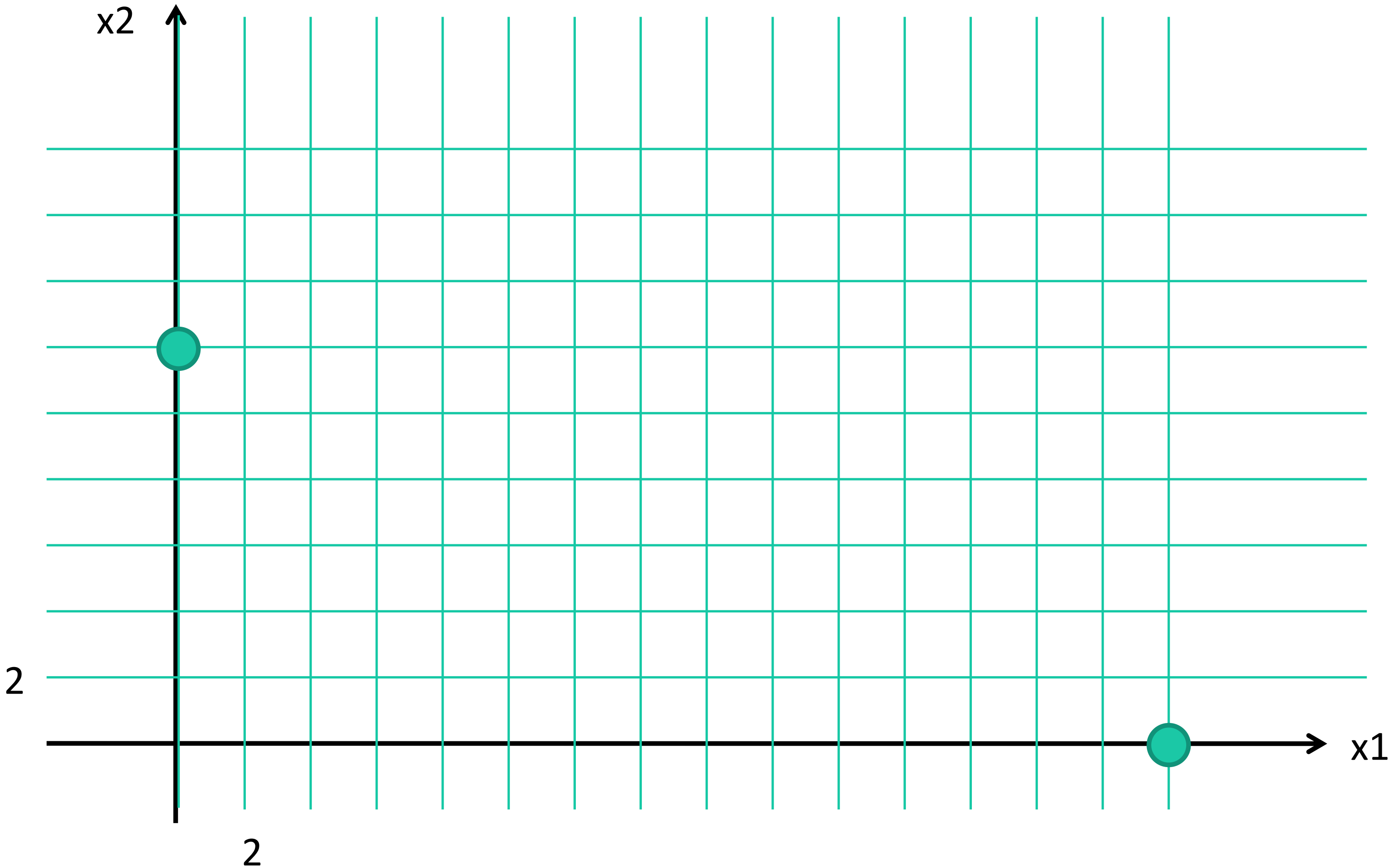
- Tolkning av utdata
- Intro lösningsmetoder
- Linjära optimeringsproblem (LP) på standardform
- Algebraisk formulering av LP
- Konvexitet

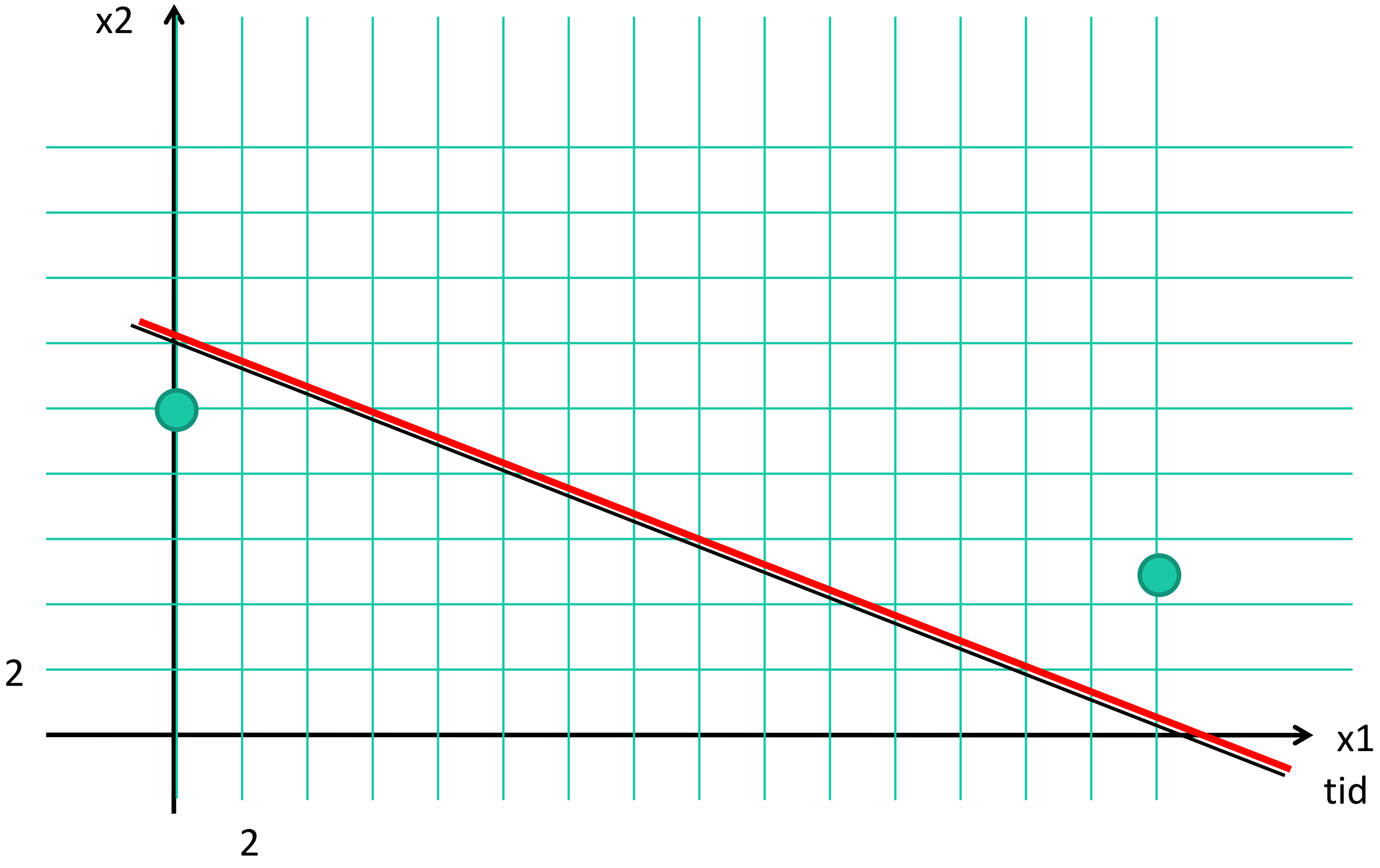
Generell sökmetod

Steg 0	Börja i en tillåten startpunkt
Steg 1	Bestäm tillåten och förbättrande sökriktning
Steg 2	Kontrollera avbrott. Saknas tillåten och förbättrande sökriktning är vi i (lokalt) opt
Steg 3	Bestäm steglängd
Steg 4	Beräkna nya punkten genom att gå steglängden i förbättrande sökriktningen
Steg 5	Repetera från steg 1

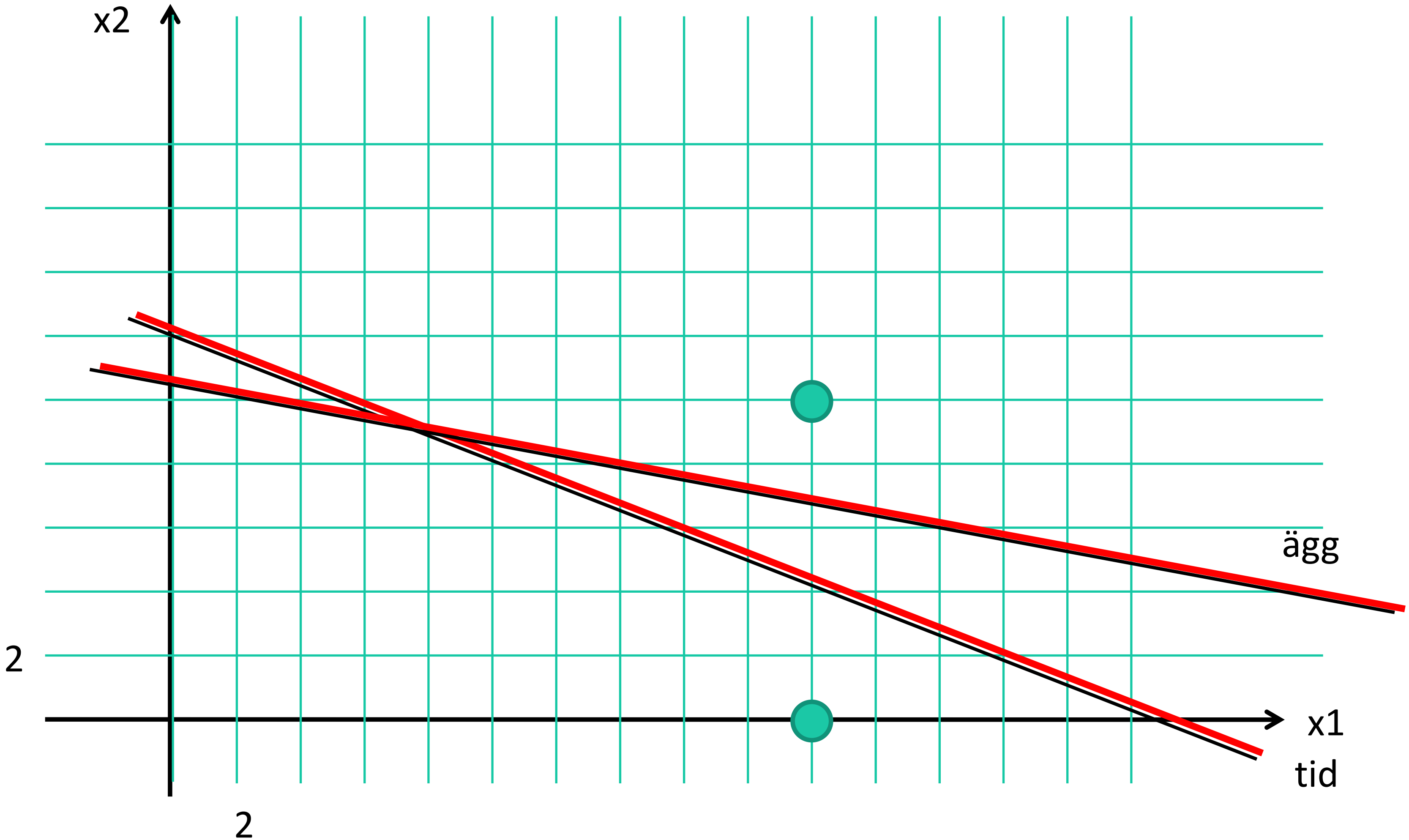

x2
x1

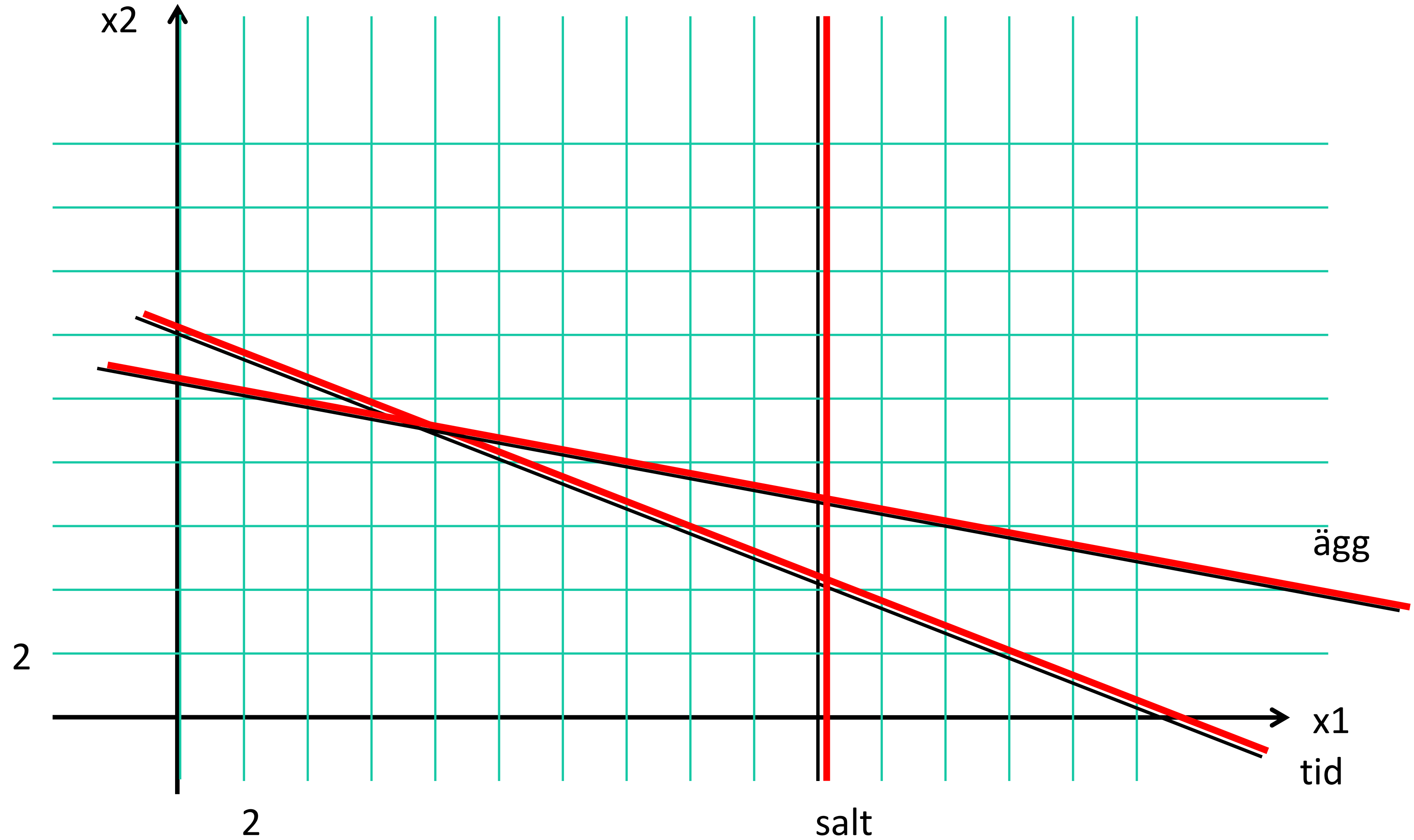

x2
x1


x2
2
x1
2

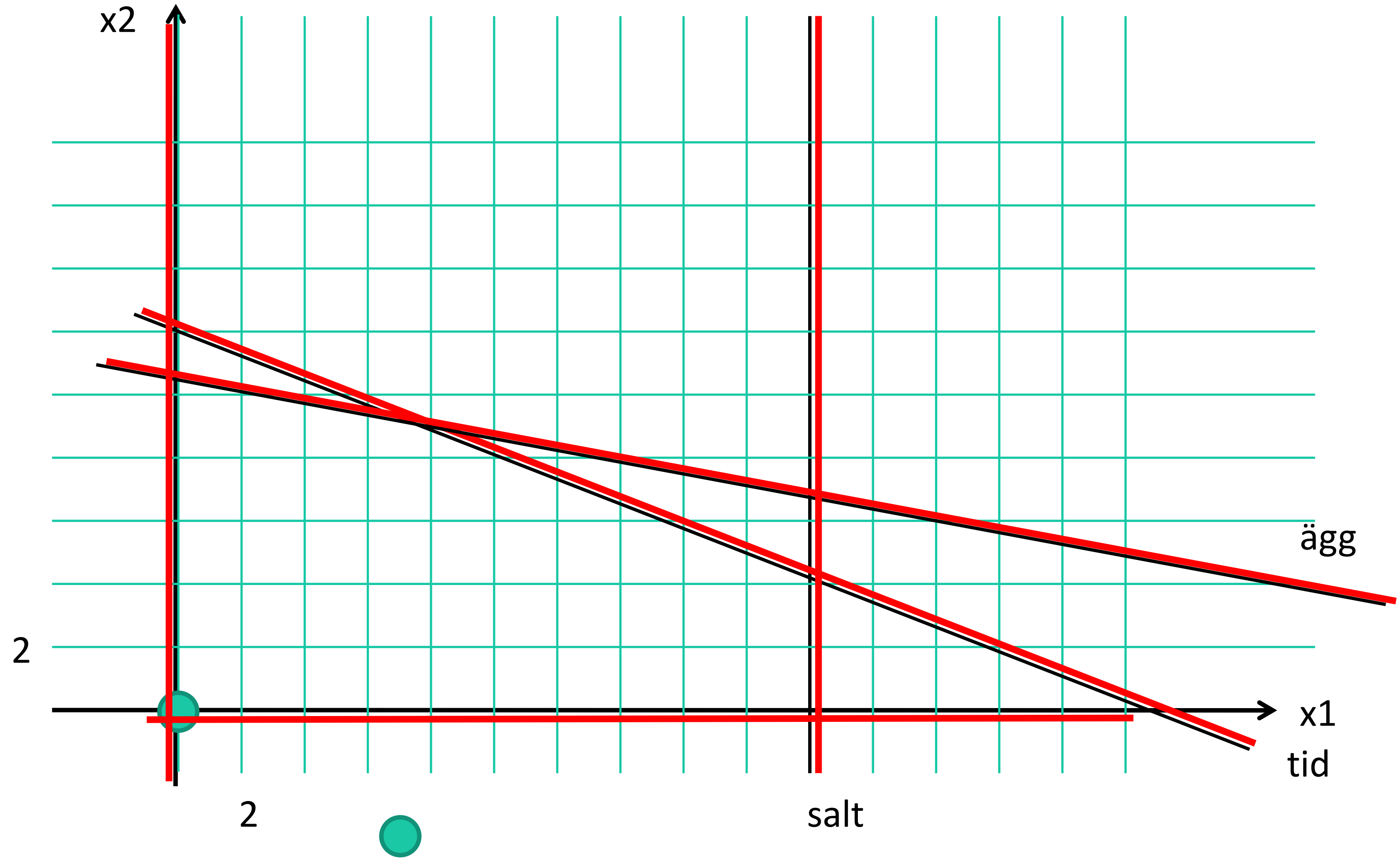


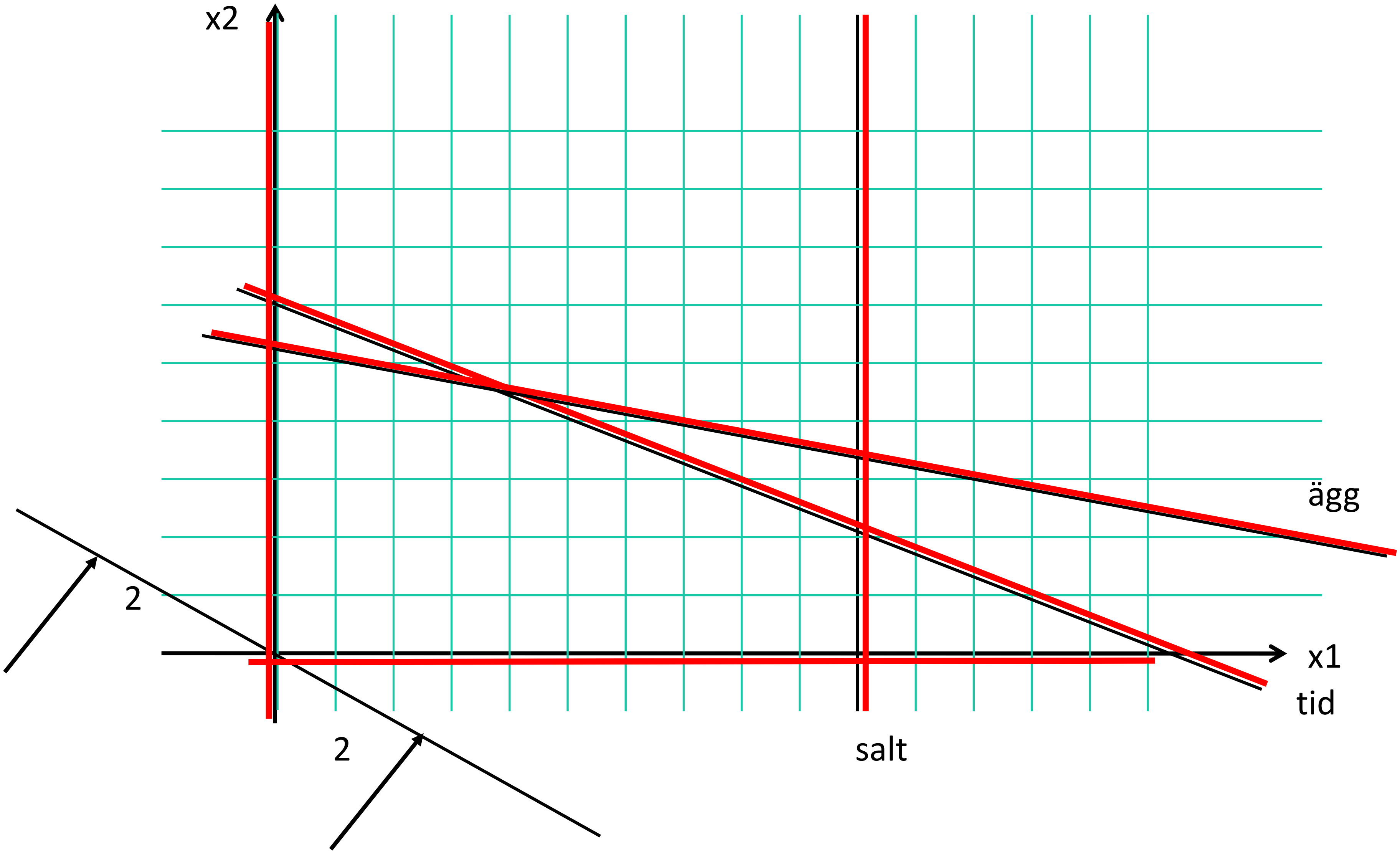
x2
2
x1
tid
2


x2
2
ägg
x1
tid
2

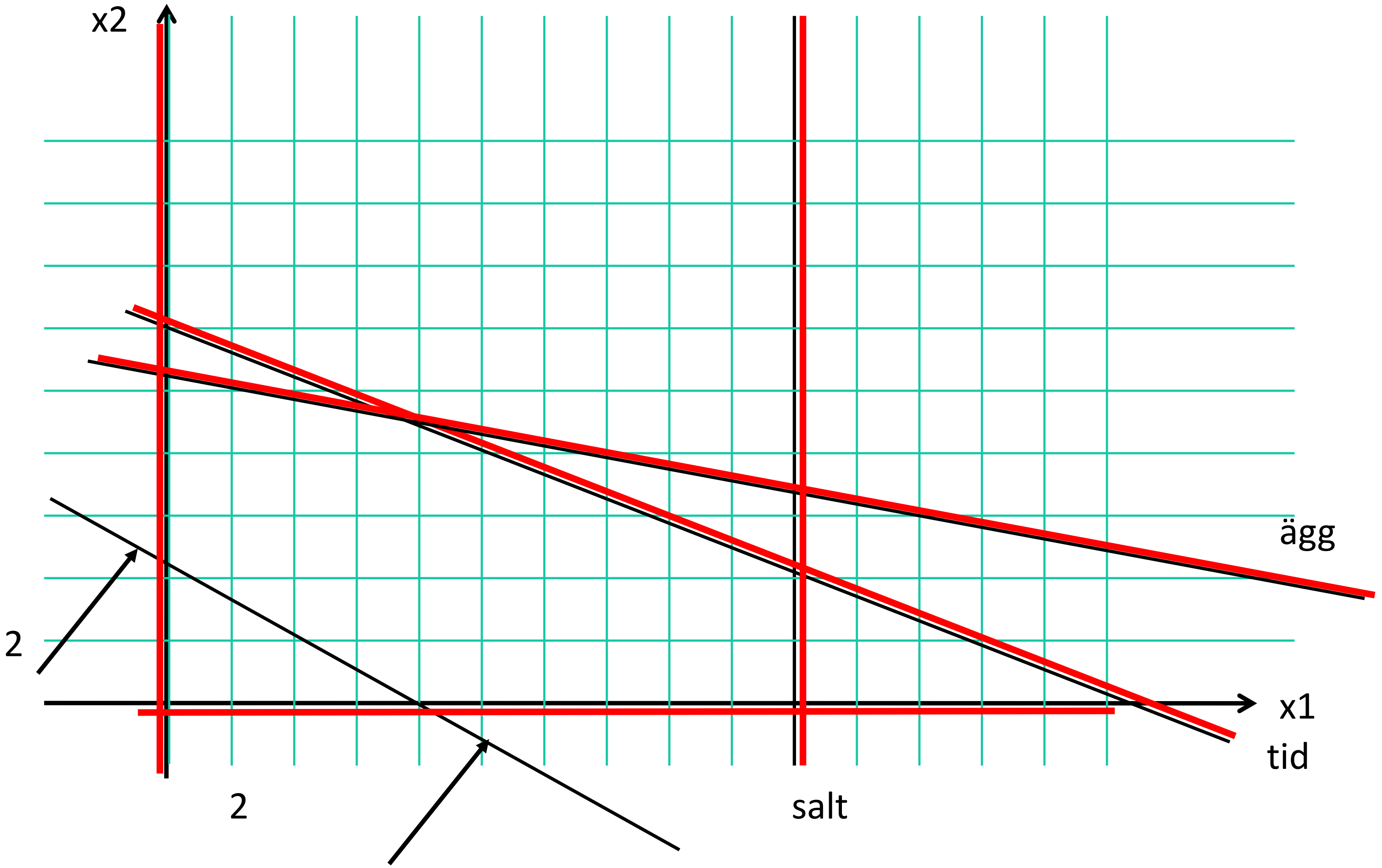


x2
ägg
2
x1
tid
2
salt

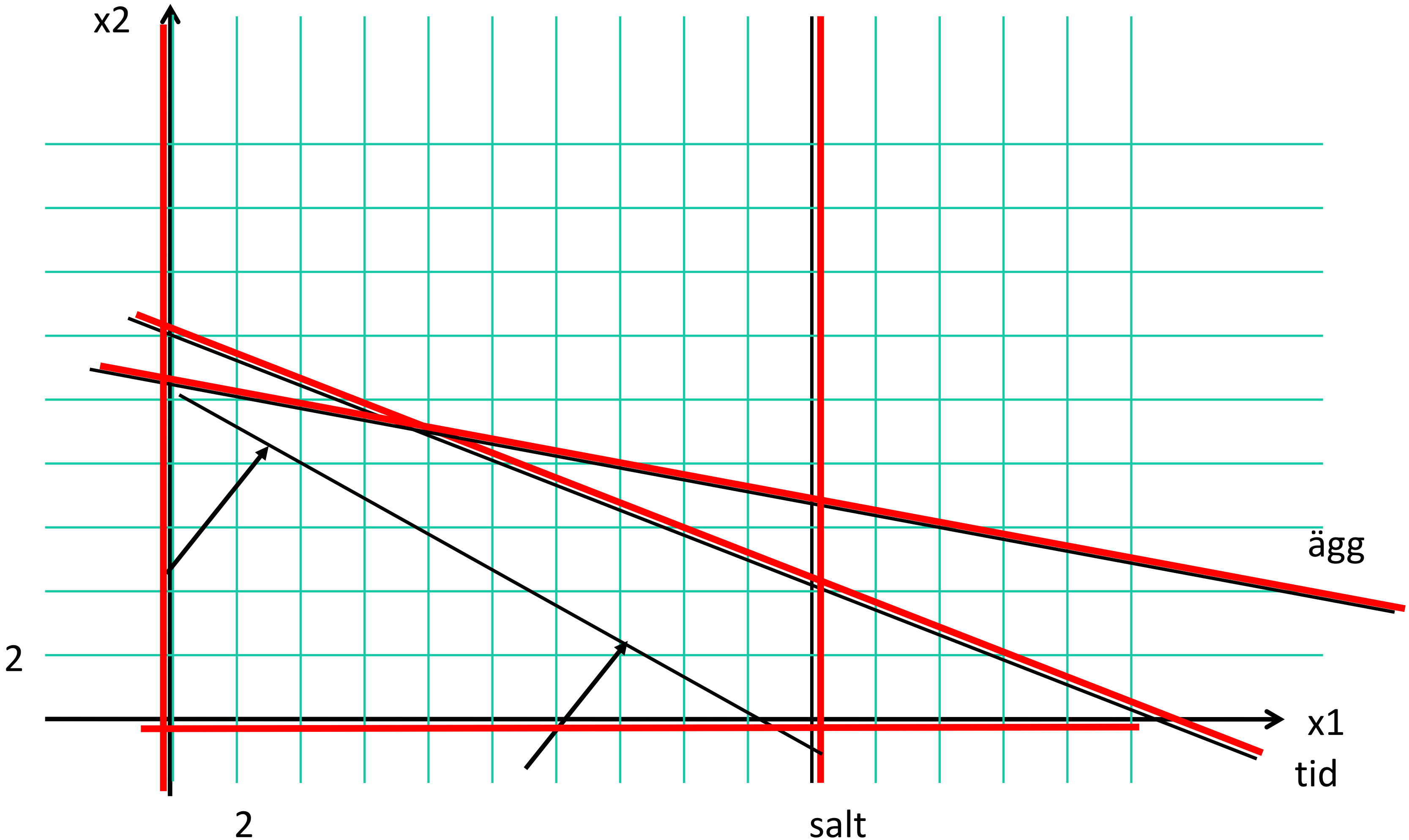

x2
ägg
2
x1
tid
2
salt

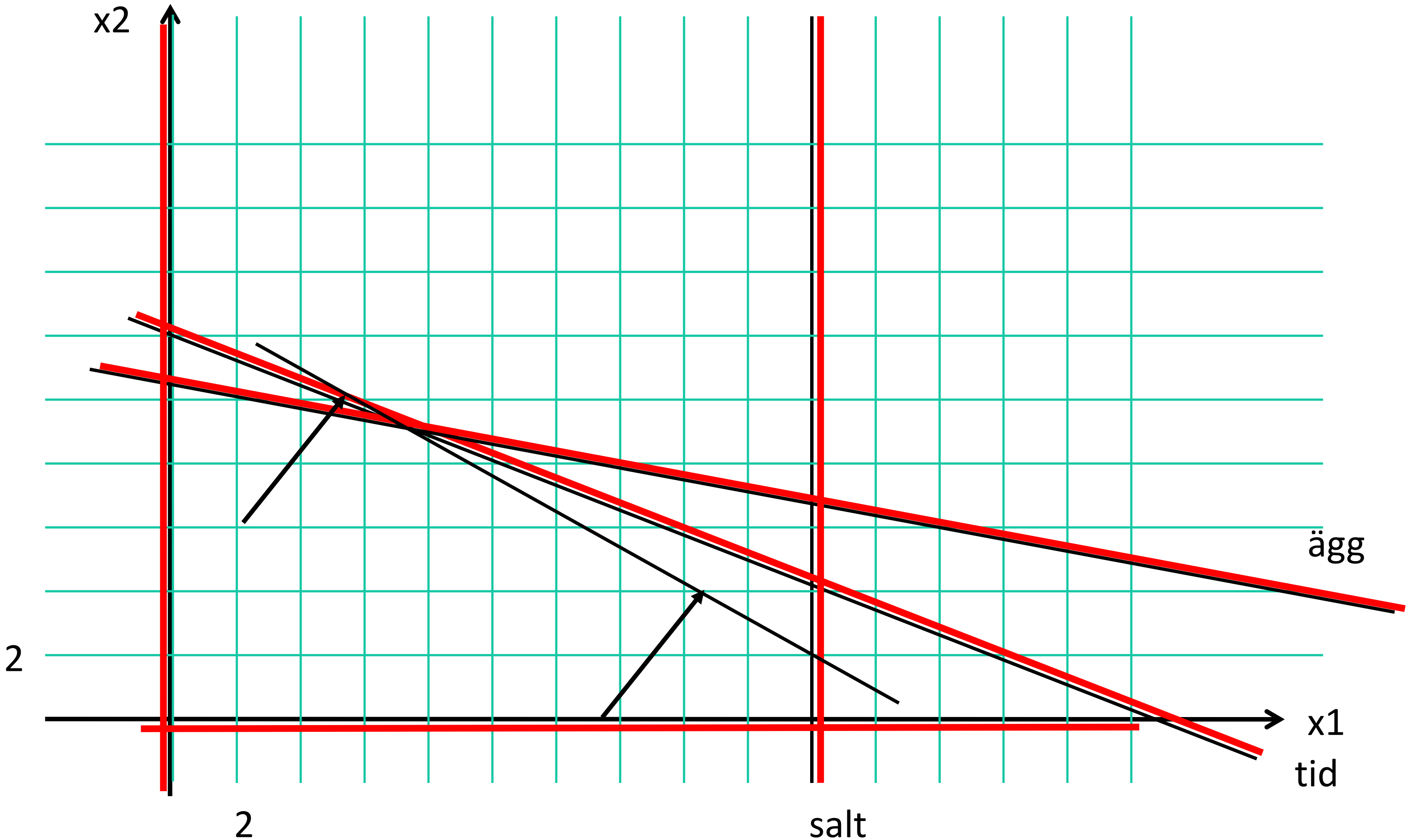


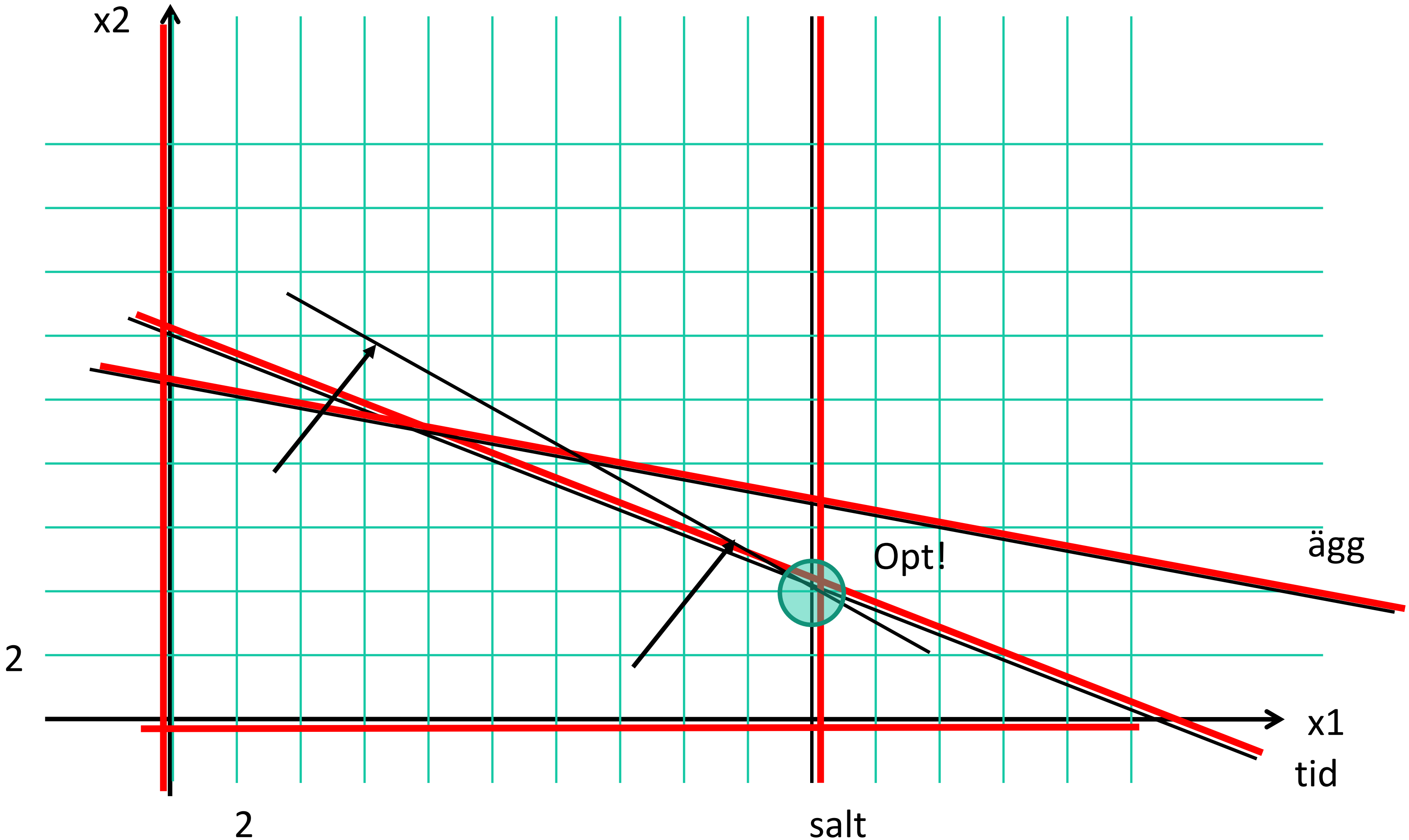
x2
ägg
2
x1
tid
2
salt



x2
ägg
2
x1
tid
2
salt

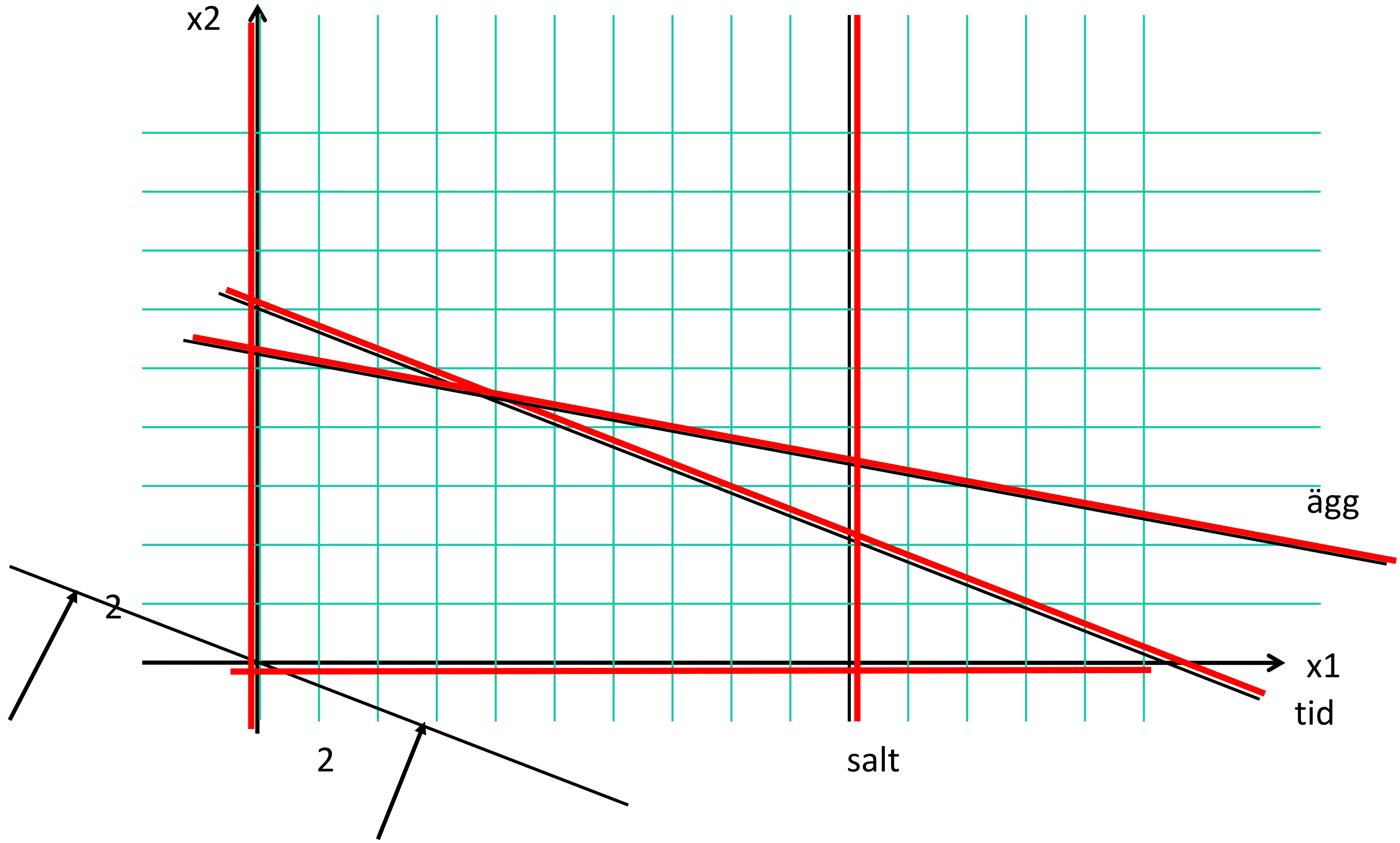

x2
ägg
2
x1
tid
2
salt

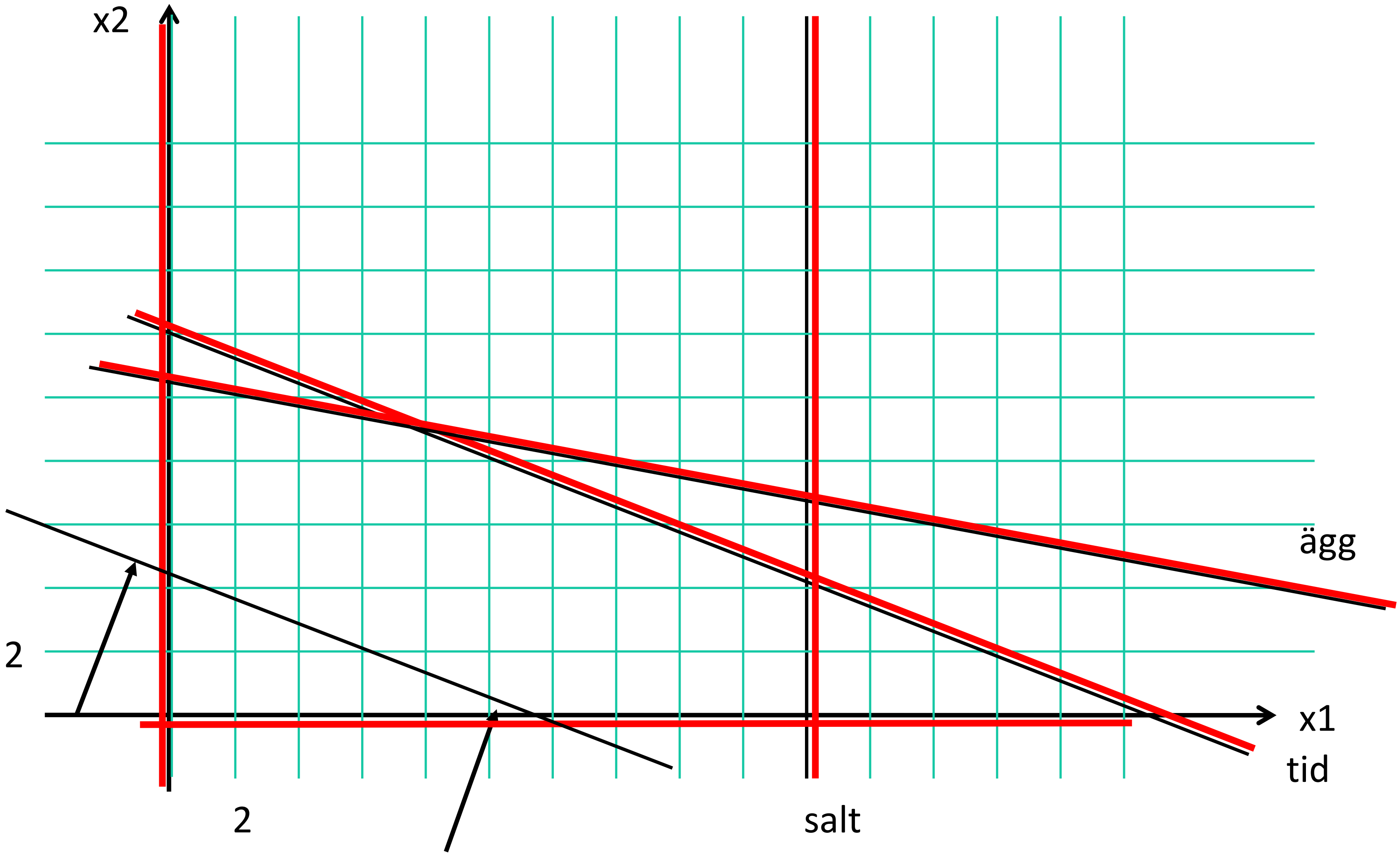

x2
ägg
2
x1
tid
2
salt

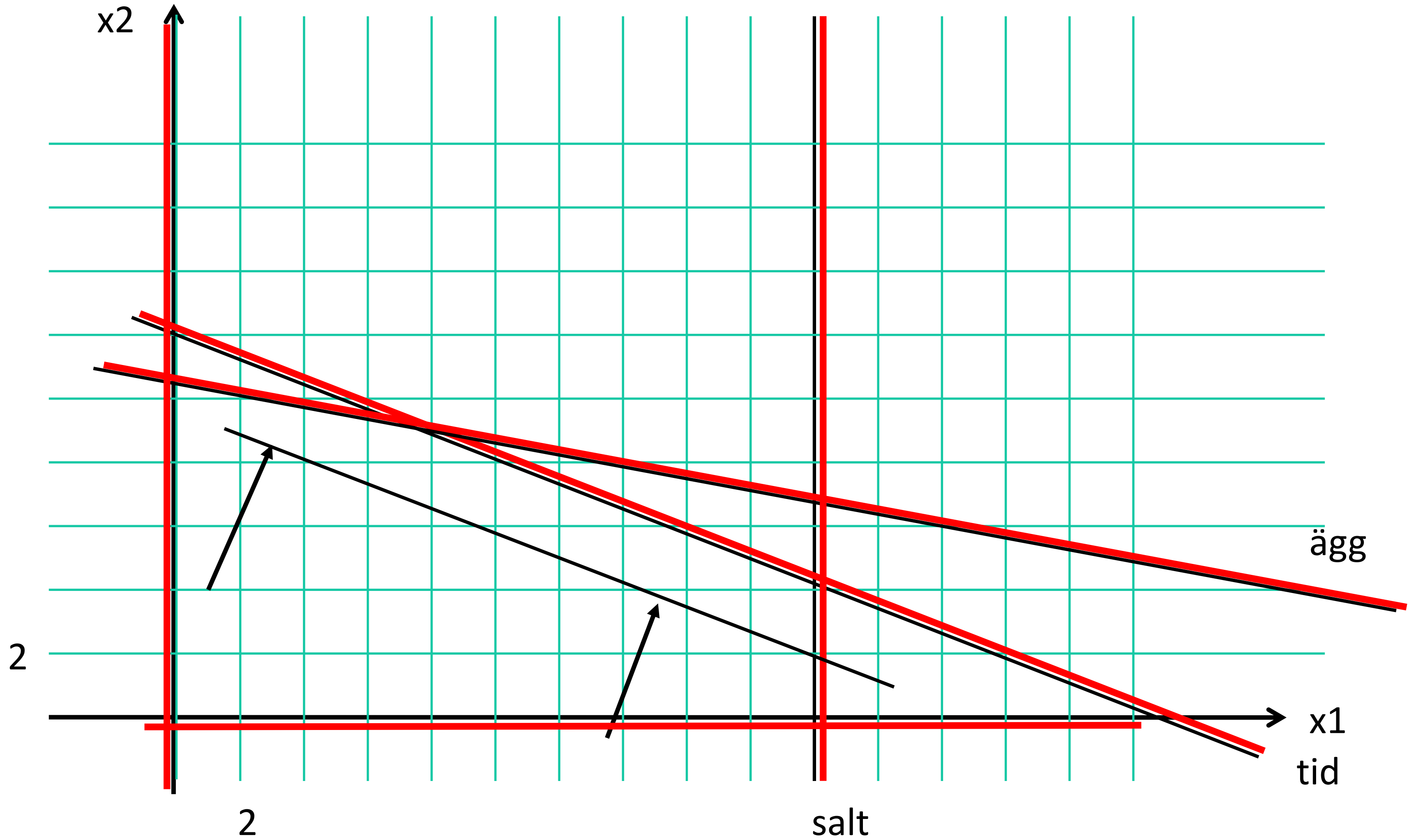


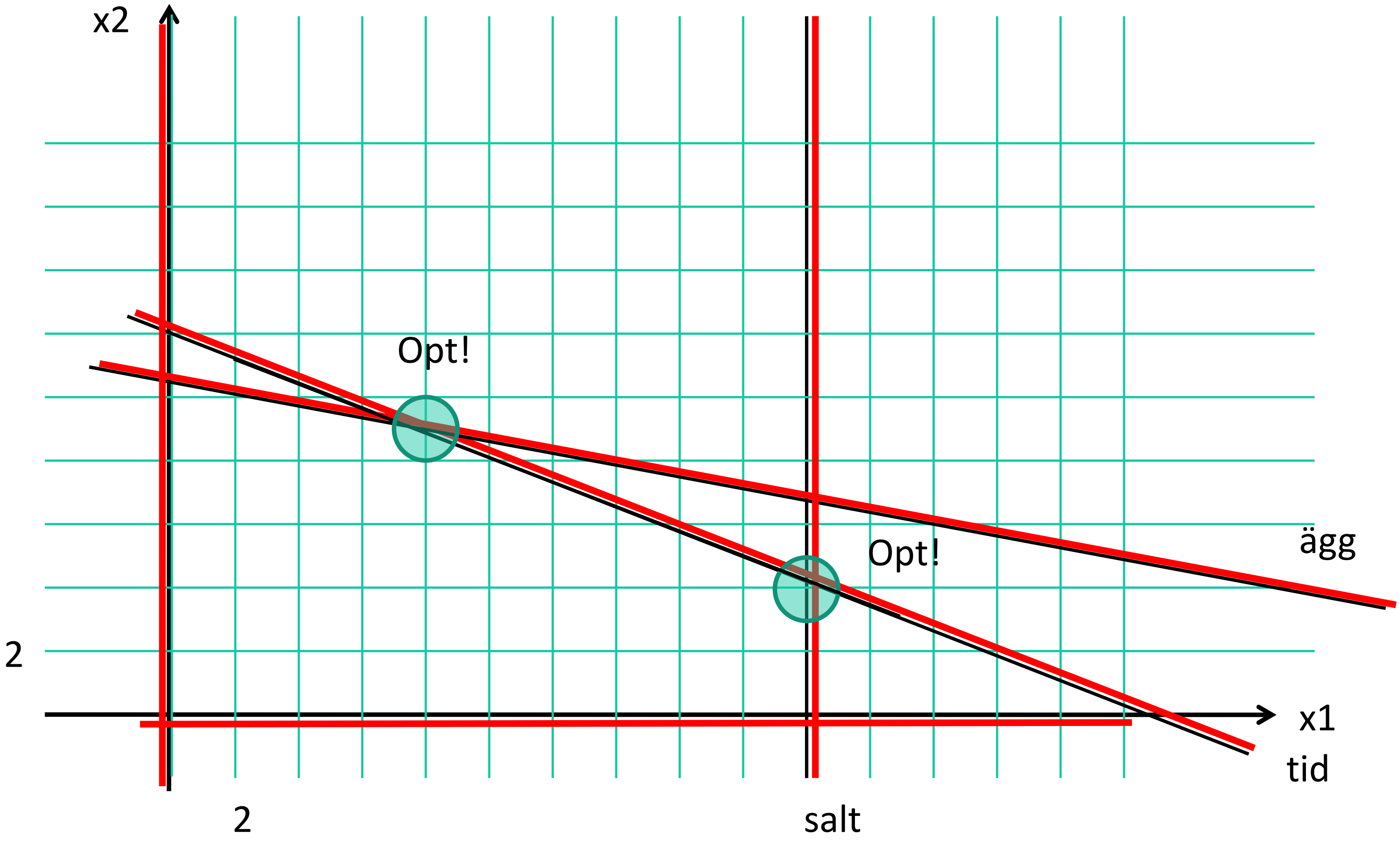
x2
ägg
Opt!
2
x1
tid
2
salt

Vad händer om vi ändrar vinsten för en sockerkaka från 15 till 20 kronor styck?


x2
ägg
x1
tid
2
2
salt


x2
ägg
2
x1
tid
2
salt


x2
2
ägg
x1
tid
2
salt


x2
Opt!
Opt!
ägg
2
x1
tid
2
salt

Agenda

- Tolkning av utdata
- Intro lösningsmetoder
- Linjära optimeringsproblem (LP) på standardform
- Algebraisk formulering av LP
- Konvexitet

LP-problem på standardform

- Standardform
  - Alla villkor likhet
    - Ev. inför s.k. slackvariabler
      - (med rätt tecken)
      - Ofta betecknas de ”s”, men det är ingen regel – bara tydlighet
  - Alla variabler ickenegativa
    - Ev. variabelsubsitution
  - Alla högerled ickenegativa
    - Ev. Teckenbyt

- Exempel

$$\max z = 7x_1 - 3x_2 + x_3$$

$$\text{då} \quad x_1 + x_2 \geq 5$$

$$x_1 - 3x_2 - x_3 \leq 7$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \geq 0$$

Algebraisk formulering av LP

$$\begin{aligned}
\max z &= 3x_1 + x_2 \\
\text{då} \quad & x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\
& x_1 + x_2 + x_4 = 5 \\
& x_2 + x_5 = 3 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Agenda

- Tolkning av utdata
- Intro lösningsmetoder
- Linjära optimeringsproblem (LP) på standardform
- Algebraisk formulering av LP
- Konvexitet

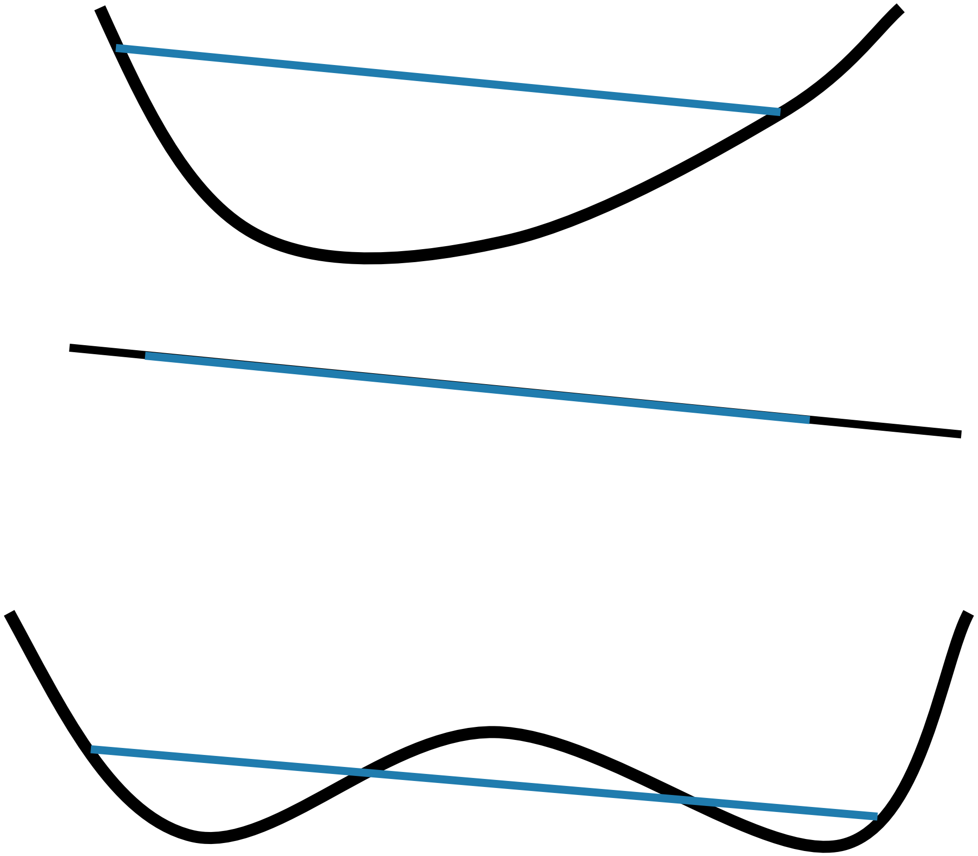
Lokala och globala optima

$$\boxed{\begin{array}{l} \min f(x) \\ \text{då } x \in X \end{array}}$$

- x^k är ett lokalt optimum (min) om $f\left(x^k\right) \leq f(x)$ för alla x tillräckligt nära x^k
- $\widehat{x}$ är ett globalt optimum (min) om $f\left(\widehat{x}\right) \leq f(x)$ för alla $x \in X$
- I ett konvext problem är varje lokalt optimum också ett globalt optimum
  - Konvex funktion över ett konvext område
  - Konvexa problem trevligare än andra

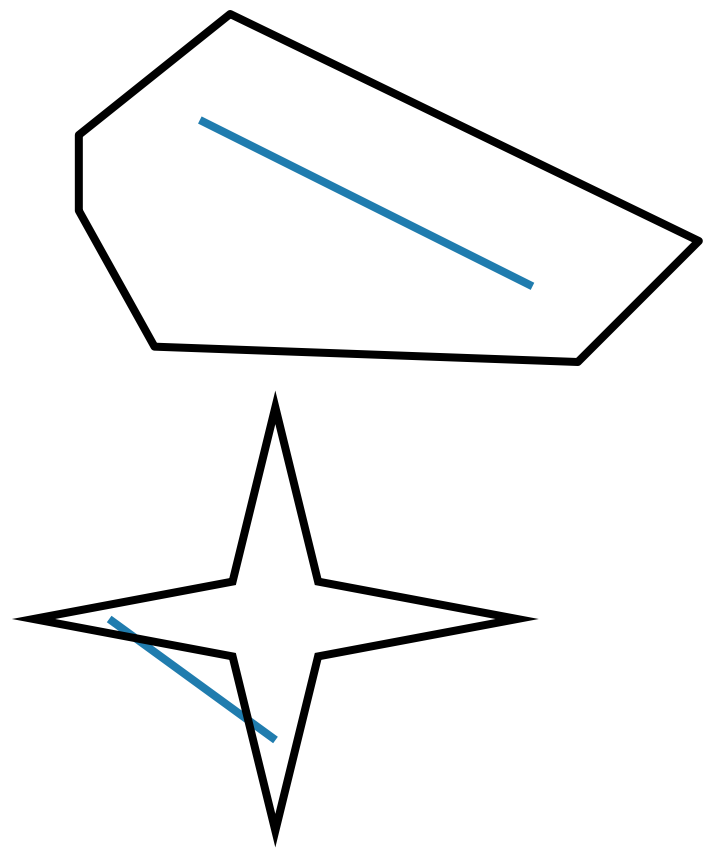
Konvexa funktioner

- Konvex om
  - Varje rät linje mellan två punkter på funktionskurvan, ligger på eller ovanför kurvan
- Ej konvex om
  - Någon rät linje mellan några punkter på funktionskurvan, ligger under kurvan



Konvexa mängder

- Konvex om
  - Varje rät linje mellan två punkter i mängden, ligger i mängden
- Ej konvex om
  - Någon rät linje mellan några punkter på mängden, går utanför mängden
- Skärning av konvexa mängder utgör en konvex mängd



Linjärprogrammeringens grunder

- Linjära bivilkor ger konvexa mängder
- Tillåtna området blir konvext
- Konvex målfunktion
- Konvext problem
  - Lokalt opt är globalt opt!
  - (Smart) lokal sökmetod funkar bra
    - Simplexmetoden

Men hur skall denna sökning gå till?

Linjärt problem

$$\boxed{\begin{array}{l} \max\ f(x) \\ \text{då } g_i(x) \le b_i, i = 1 \ldots n \end{array}}$$

$$\max f(x) = 2x_1 + x_2$$
$$\text{då } 2x_1 + 2x_2 \le 9$$
$$x_2 \le 2$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

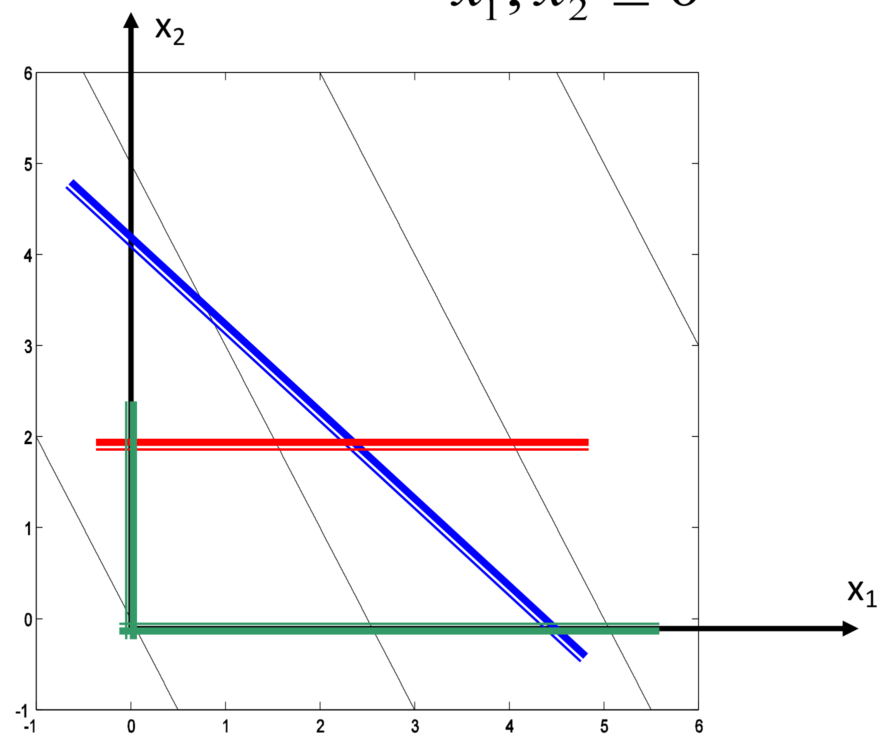
- Om

$$f(x), g_i(x), \forall i$$

är linjära

Konvext problem

-> Lokalt opt=globalt



Ickelinjärt problem

$$\max f(x) = \sin(2x_1) + \sin(x_2) + (x_1 + x_2)/5$$

$$\text{då } 2x_1 + 2x_2 \le 9$$

$$x_2 \le 2$$

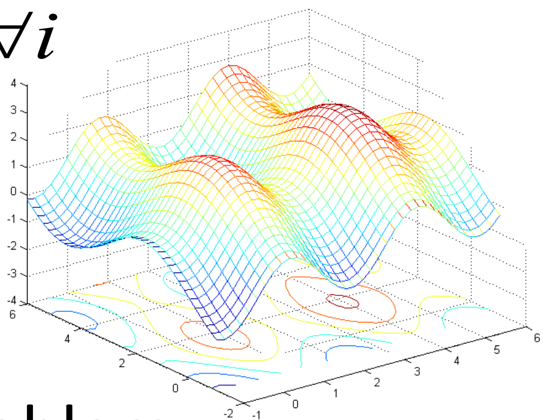
$$x_1, x_2 \ge 0$$

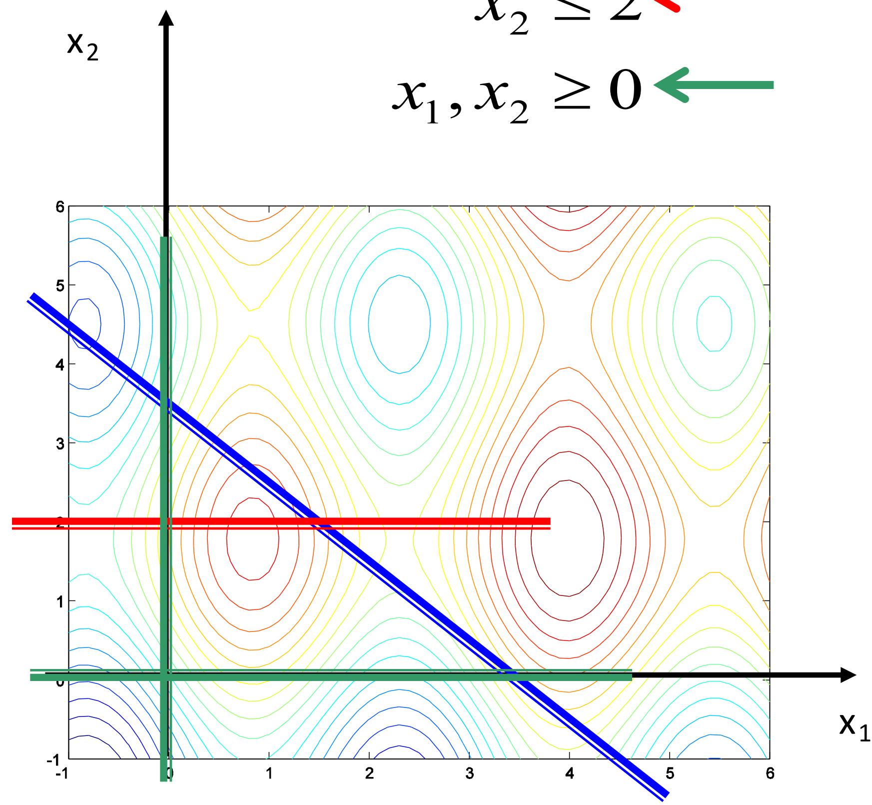
$$\boxed{\begin{aligned} &\max f(x) \\ &\text{då } g_i(x) \le b_i, i = 1 \ldots n \end{aligned}}$$

- Om minst en av

$f(x), g_i(x), \forall i$

är ickelinjär





Ickekonvext problem

-> Lokalt opt=????

Diskreta problem

$$\max f(x) = 2x_1 + x_2$$
$$\text{då } 2x_1 + 2x_2 \le 9$$
$$x_2 \le 2$$
$$x_1, x_2 \ge 0, \text{heltal}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\max f(x) \\ \text{då } g_i(x) \le b_i, i = 1 \ldots n\end{array}}$$

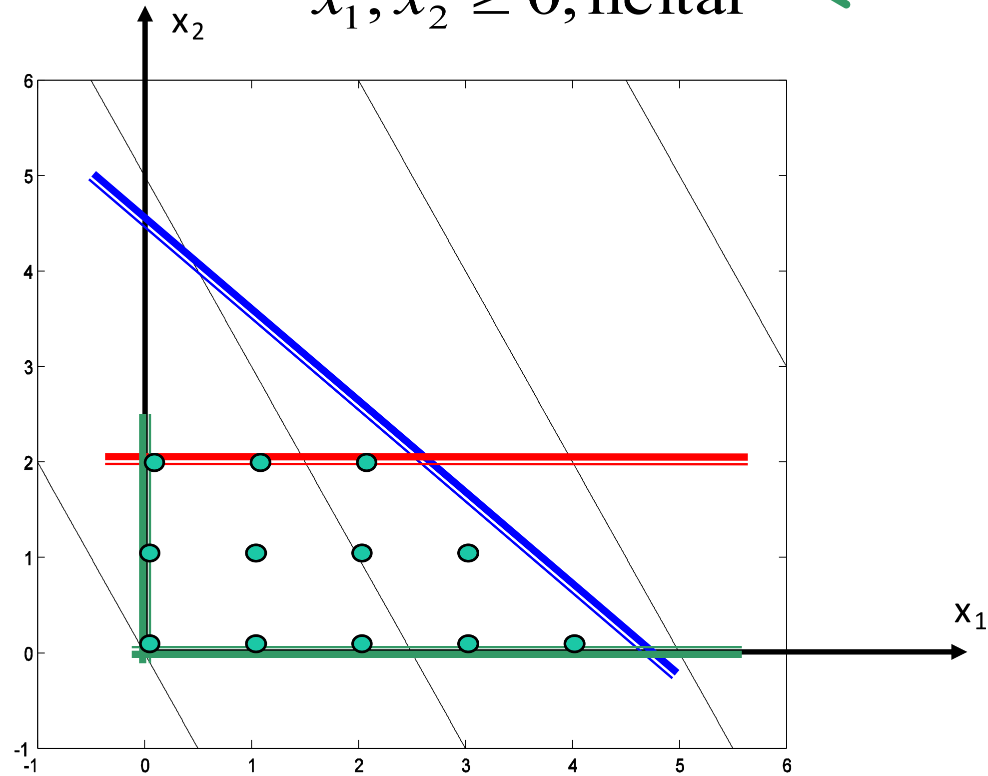
- Om dessutom

$$x$$

är diskreta (tex. heltal)

Vad betyder ”lokal”?

Lokalt opt=???



www.liu.se