TNSL05 – Optimering , Modellering och Planering

Föreläsning 9

LINKÖPING UNIVERSITY

Agenda

Kursens status

Dualitet

Billigaste väg problem

Kursens status

- Föreläsning (1), 2-5: Modellering
- Föreläsning 6-10, (11) Lösningsmetod/känslighetsanalys
- Gruppuppgifter:
  - Gruppuppgift 1: Rättning pågår, vissa har fått feedback
  - Gruppuppgift 2: Muntlig redovisning den här veckan, skriftlig inlämning pågår
  - Gruppuppgift 3: Uppgiften kommer ut idag, efter sista redovisning av gruppuppgift 2
- Laborationen
  - Moment 1 och 2 är avslutade
  - Moment 1+3: Inlämning rapport fredag v. 51

Agenda

Kursens status

Dualitet

Billigaste väg problem

Repetition: Föreläsning 8

- Simplex: Redundans, degenerering
- **Relaxation/restriktion**
- **Känslighetsanalys**

- Skuggpris (marginalpris, **dualvärde**)
  - Anger hur målfunktionsvärdet påverkas av en marginell relaxation/restriktion i högerledet
  - ”Vad är ytterligare en enhet av en resurs värd”?

Dualitet: Ekonomisk tolkning

- Linus säljer pannkakor och sockerkakor, igen.
- Tillgången till resurserna tid, ägg, salt är begränsad
- Han vill maximera vinsten
- $x_1 =$ Antal pannkakor, $x_2 =$ Antal sockerkakor

$$\max z = 6x_1 + 15x_2 \quad \text{(Maximera vinsten)}$$

$$\begin{array}{lrl} \text{då} & 4x_1 + 10x_2 \leq 120 & \text{(Max tidsåtgång/dag, minuter)} \\ & \tfrac{1}{3}x_1 + 2x_2 \leq 20 & \text{(Max antal ägg/dag)} \\ & x_1 \leq 30 & \text{(Max krm salt/dag)} \\ & x_1, x_2 \geq 0 & \text{(Ickenegativitet)} \end{array}$$

Dualitet: Ekonomisk tolkning

- Mias matbutik är intresserad att köpa ut Linus från hans verksamhet
- Vill köpa hans arbetskraft och ägg, salt
- Hon vill betala så lite som möjligt för resurserna men tillräckligt för att Linus ska gå med på det

$$\min w = 120v_1 + 20v_2 + 30v_3 \quad \text{(minimera kostnaden)}$$

$$\text{då} \quad 4v_1 + \tfrac{1}{3}v_2 + v_3 \geq 6 \quad \text{(Linus f.d. vinst för pannkakor)}$$

$$10v_1 + 2v_2 \geq 15 \quad \text{(Linus f.d. vinst för sockerkakor)}$$

$$v_1, v_2 \geq 0 \quad \text{(Ickenegativitet)}$$

Dualitet

- Till varje LP finns ett *dualt* problem
  - ”Primalen”: Originalproblemet
  - ”Dualen”: Duala problemet
- Kopplingar mellan problemen som kan utnyttjas
  - Känslighetsanalys
  - Lösningsmetoder
    - Lös dualen istället för primalen om det är lättare och få ut information om primalen

Primal-duala relationer

Primal	Dual
n st variabler	n st villkor
m st villkor	m st variabler
Maxproblem	Minproblem

Primal-duala relationer

Primal	Dual
n st variabler	n st villkor
m st villkor	m st variabler
Maxproblem	Minproblem
Villkor: $\begin{cases} \leq \\ \geq \\ = \end{cases}$	Variabel: $\begin{cases} \geq 0 \\ \leq 0 \\ \text{fri} \end{cases}$
Variabel: $\begin{cases} \geq 0 \\ \leq 0 \\ \text{fri} \end{cases}$	Villkor: $\begin{cases} \geq \\ \leq \\ = \end{cases}$

Exempel: Dualitet

- Uppgift 6.1 b

Dualitetsteori

$$(P)\quad \begin{aligned} \max z &= \mathbf{c}^T x \\ \text{då} \quad \mathbf{A}x &\le \mathbf{b} \\ x &\ge 0 \end{aligned} \qquad\qquad (D)\quad \begin{aligned} \min w &= \mathbf{b}^T v \\ \text{då} \quad \mathbf{A}^T v &\ge \mathbf{c} \\ v &\ge 0 \end{aligned}$$

- D är duala problemet till P. P är duala problemet till D.

Svag dualitet

- $\hat{x}$ tillåten i (P), $\hat{v}$ tillåten i (D). Då gäller $\mathbf{c}^T \hat{x} \le \mathbf{b}^T \hat{v}$
- Tillåten lösning i ena problemet ger optimistisk uppskattning till det andra

Stark dualitet

- Om P eller D har en begränsad optimallösning x*/v* så har även det duala det med samma målfunktionsvärde: $\mathbf{c}^T x^* = \mathbf{b}^T v^*$

Agenda

Kursens status

Dualitet

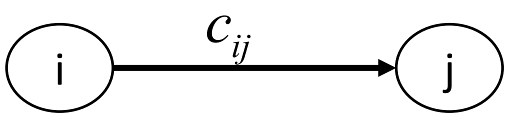
Billigaste väg problem

Billigaste väg problem (BVP)

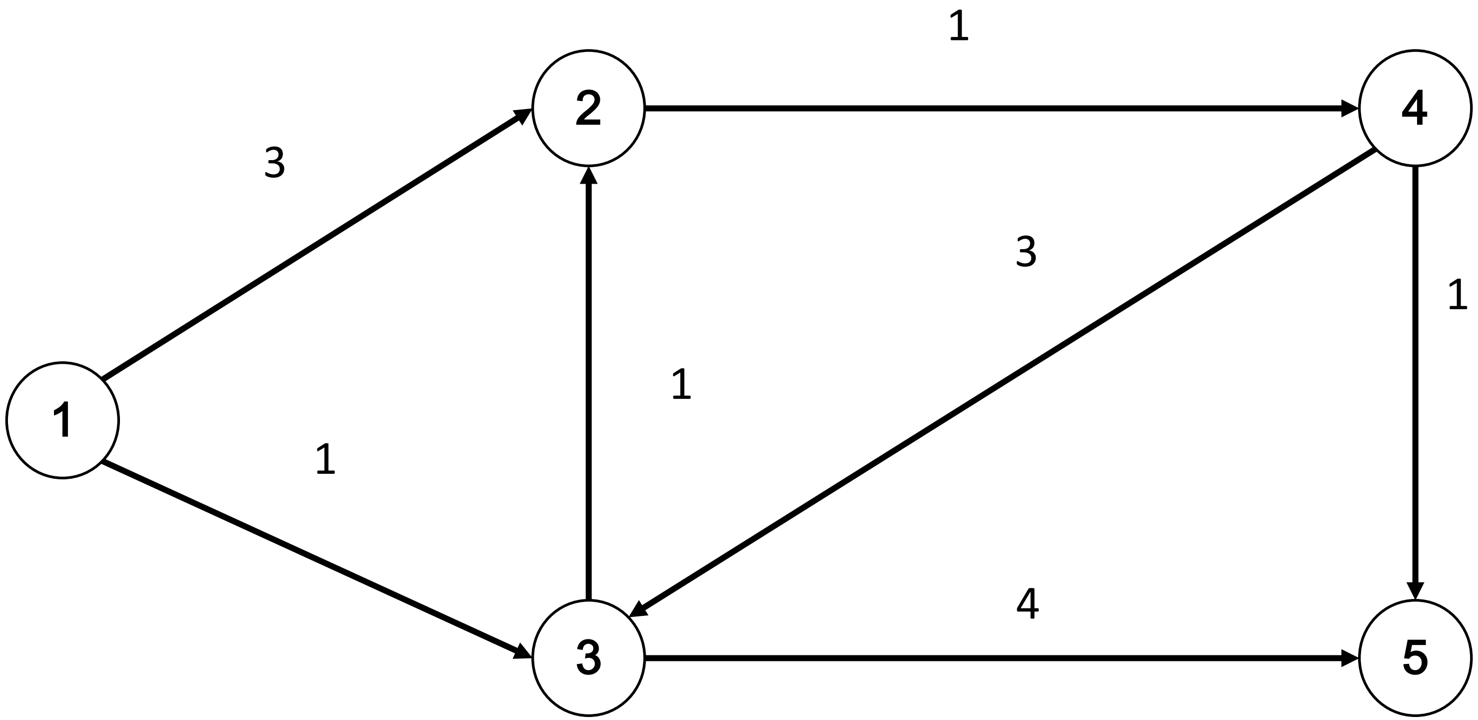
- Givet: Nätverk (noder + bågar)
- Mål: Hitta ~~billigaste~~ väg från A till B

  ~~snabbaste~~ ~~vackraste~~ roligaste …

Exempel (BVP)



Sök billigaste väg från nod 1 till nod 5!



Billigaste väg problem (BVP)

- Givet: Nätverk (noder + bågar)
- Mål: Hitta ~~billigaste~~ väg från A till B

  ~~snabbaste~~ ~~vackraste~~ roligaste ...

- Specialfall av minkostnadsflödesproblemet (MKF)
  - Definiera x_{ij} = 1 om båge i-j används, 0 annars
  - Kan lösas som ett vanligt LP problem
  - Potentiellt problem: Vad om vi får lösning med x_{ij} = 0.5?
    - Dock: MKF har *heltalsegenskap* (minst en lösning är heltalig!)

Bellmans ekvationer (Nodpris)

- Det finns bättre sätt att lösa kortaste väg problem än via LP
  - utnyttnar problemstrukturen
- Bellmans ekvationer beskriver optimalitetsvillkoren i ett BVP
  - s = startnod, c_{ij} = bågkostnad

	Nodpris startnod	Nodpris övriga noder	Exempel
Billigaste väg	$y_s = 0$	$y_j = \min\limits_{i \mid (i,j) \in B} \{y_i + c_{ij}\}$	Uppgift 8.13
Dyraste väg	$y_s = 0$	$y_j = \max\limits_{i \mid (i,j) \in B} \{y_i + c_{ij}\}$	Uppgift 8.22
Max kapacitet	$y_s = \infty$	$y_j = \max\limits_{i \mid (i,j) \in B} \{\min(y_i, c_{ij})\}$	Bok sid 201; Uppg. 8.15b

Dijkstras algoritm (1959) (Fords algoritm*)

1. *Initialisering*: A = avsökta noder, D = ej avsökta. Märk startnoden s med $(p_s, y_s) = (-, 0)$ (föregående nod, nodpris), övriga noder med $(-, \infty)$
2. Välj $i \in D$ med lägst nodpris.
3. *Avsök nod i*: För alla utgående bågar i-j: Om $y_i + c_{ij} < y_j$ har billigare väg hittats. Märk nod j med $(p_j, y_j) = (i, y_i + c_{ij})$
   (Om $j \in A$ flytta j till D) *
4. Flytta nod i från D till A.
5. Om D tomt, avbryt! Annars går till 2.

* Om nätverket har negativa bågkostnader

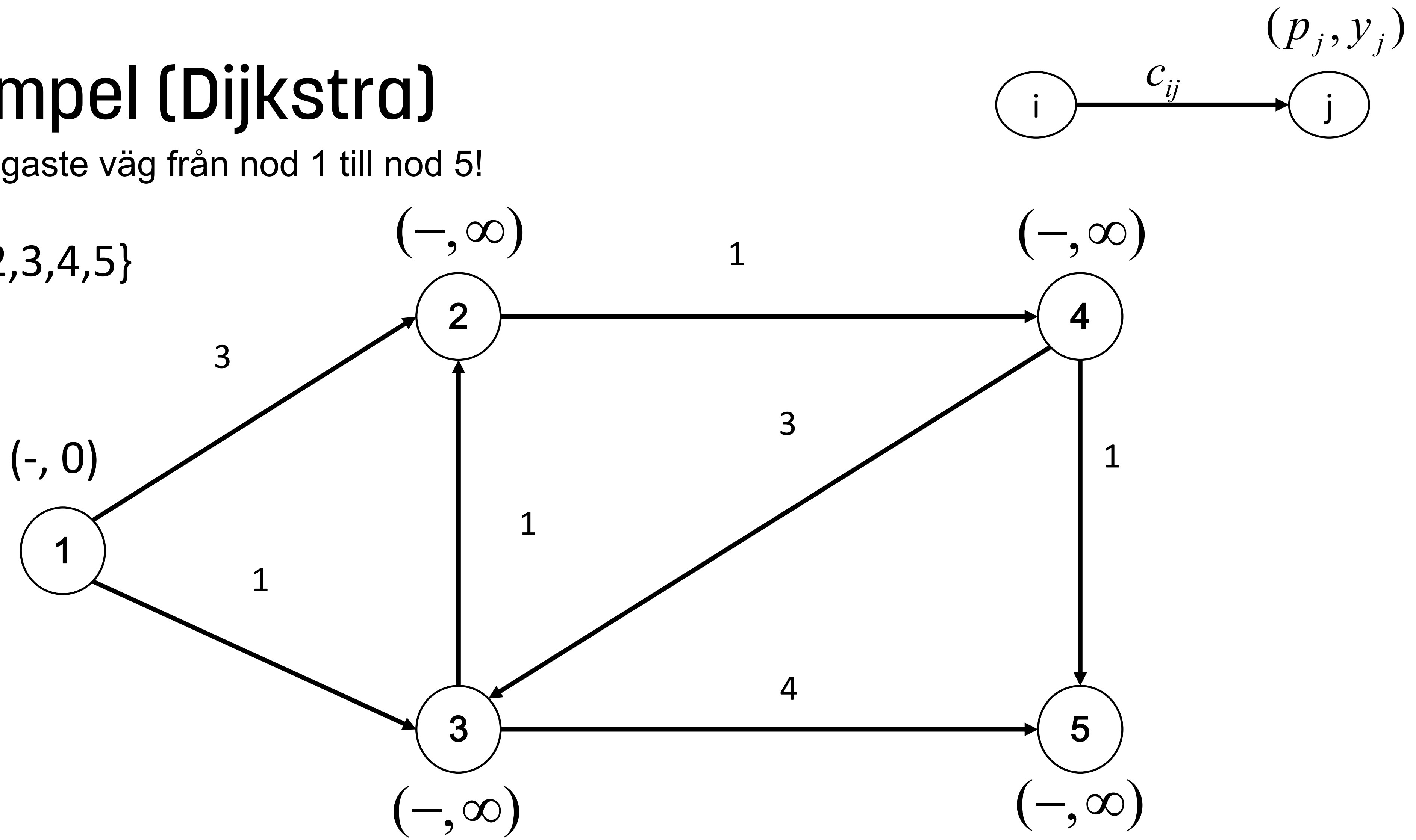
Mer detaljerad beskrivning sidor 192-193 i boken

Exempel (Dijkstra)

Sök billigaste väg från nod 1 till nod 5!

D={1,2,3,4,5}

A={}

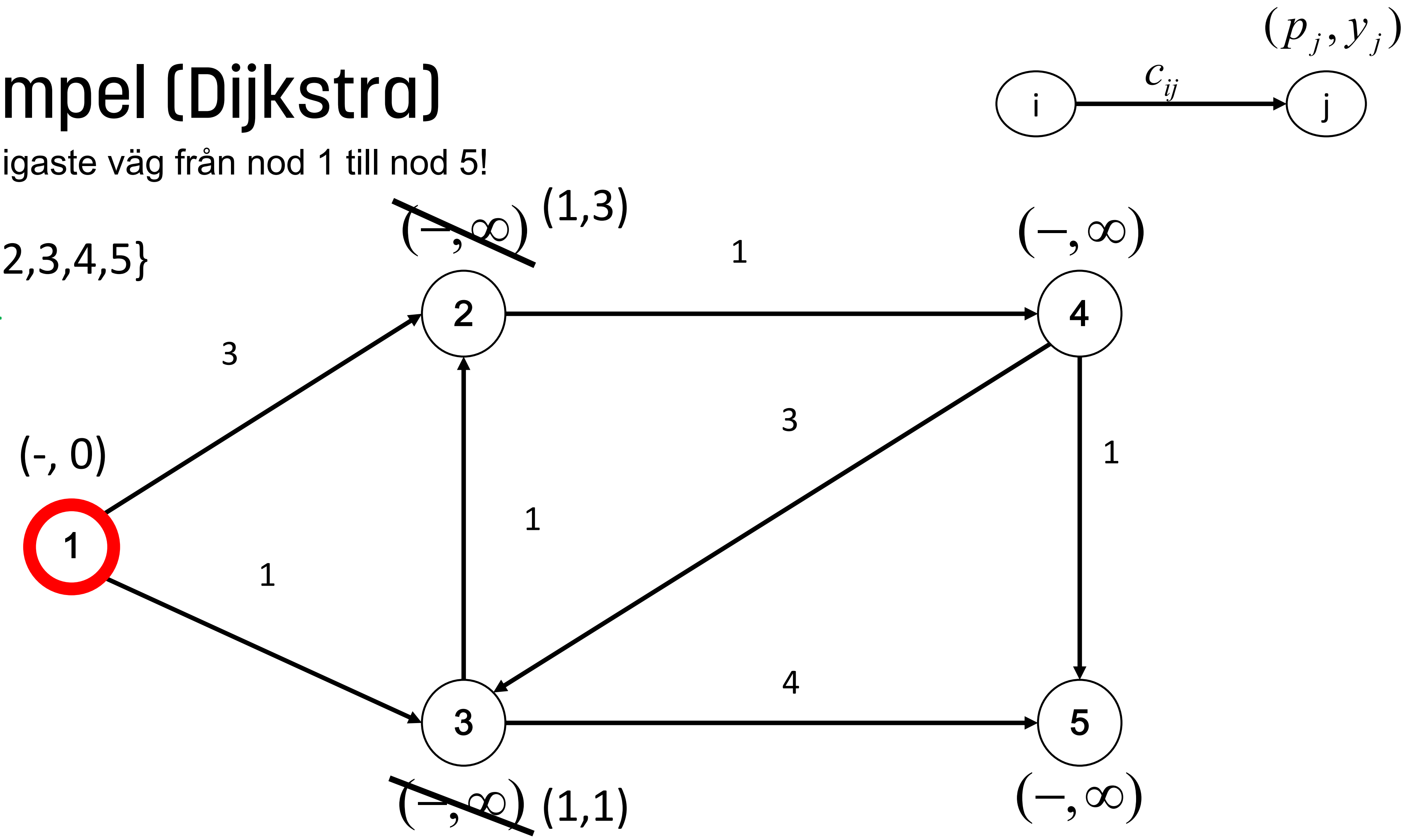


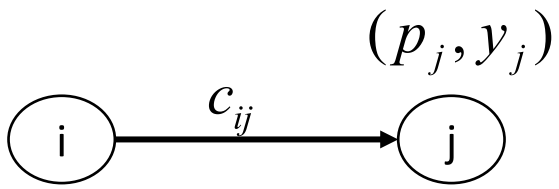
Exempel (Dijkstra)

Sök billigaste väg från nod 1 till nod 5!

D={ 1,2,3,4,5}

A={ }



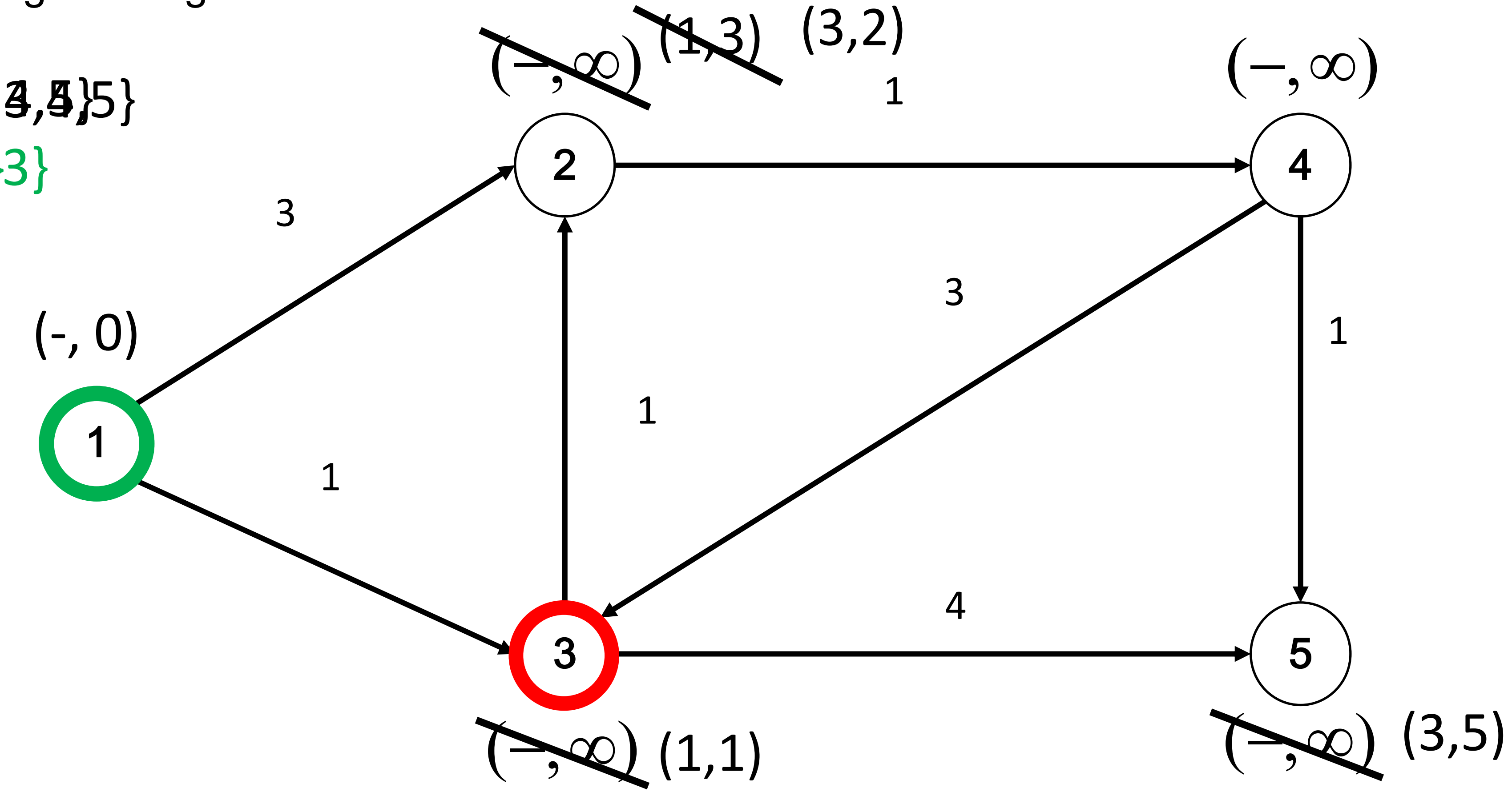


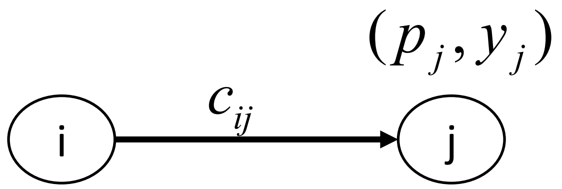
Exempel (Dijkstra)

Sök billigaste väg från nod 1 till nod 5!

D={2,4,5}

A={1,3}



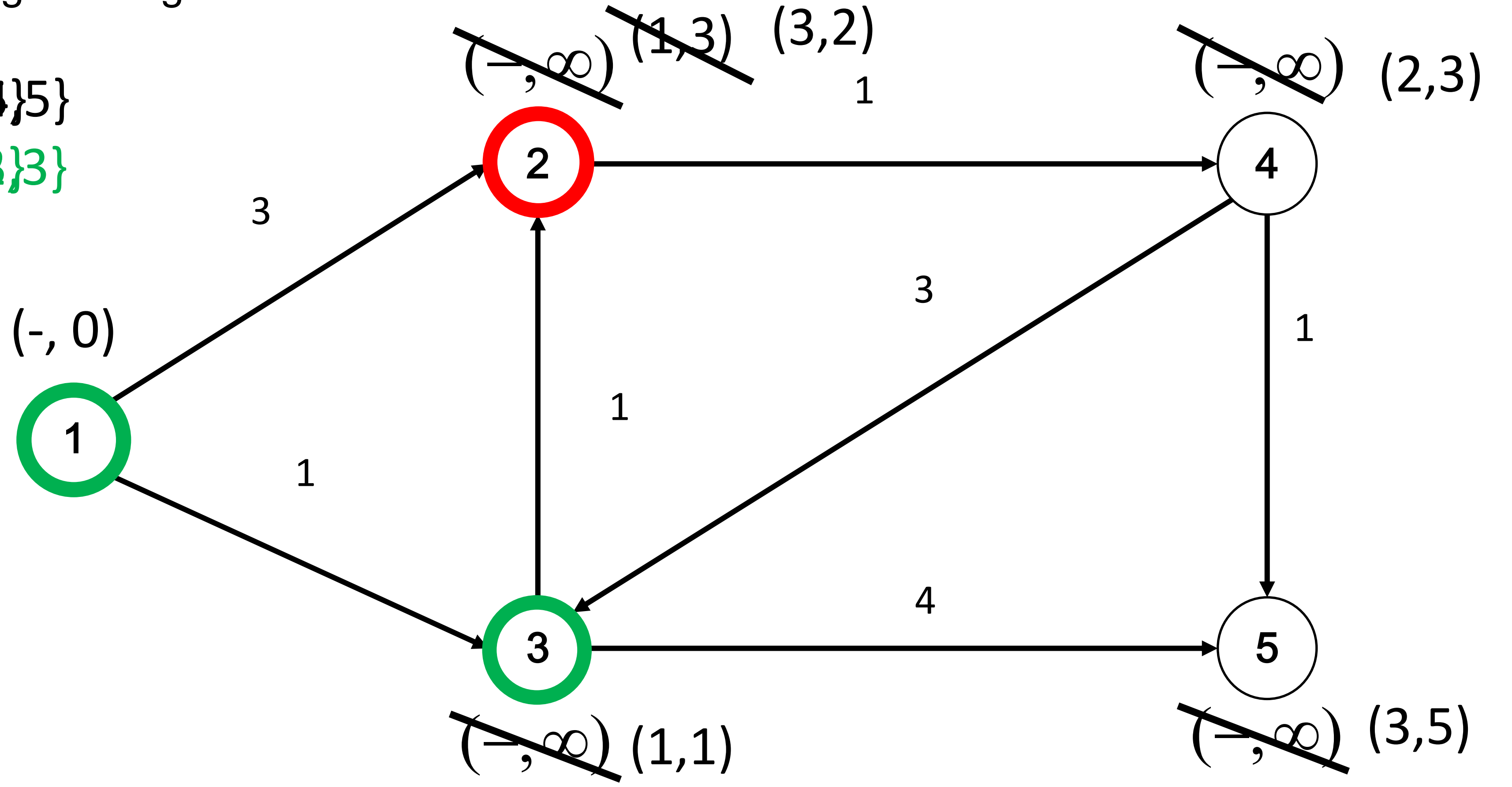


Exempel (Dijkstra)

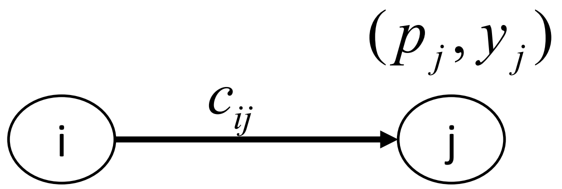
Sök billigaste väg från nod 1 till nod 5!

D={4,5}

A={1,2,3}



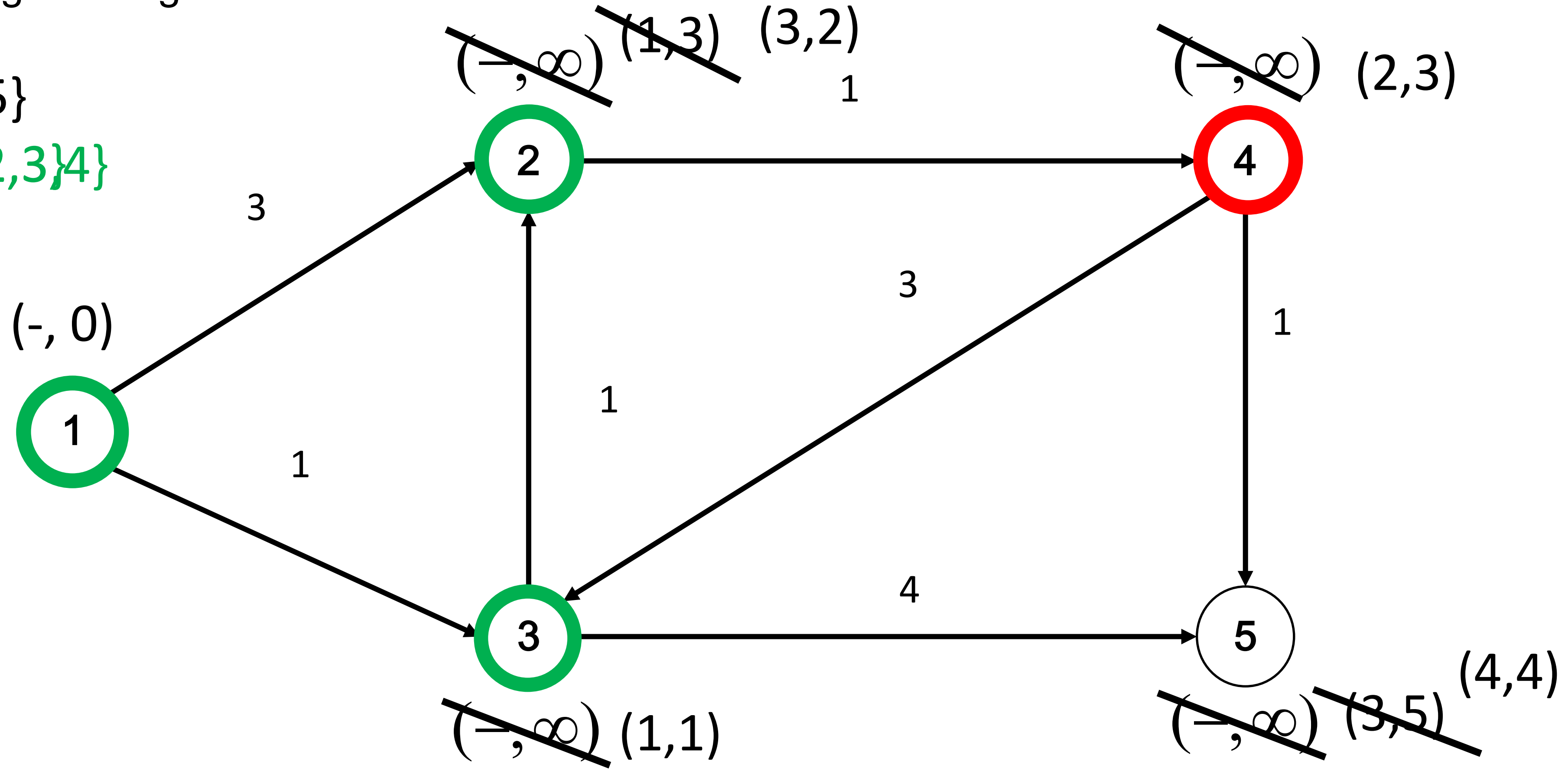
Exempel (Dijkstra)

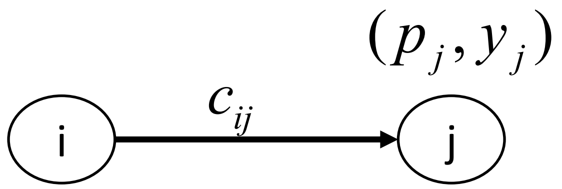


Sök billigaste väg från nod 1 till nod 5!

D={4,5}

A={1,2,3,4}



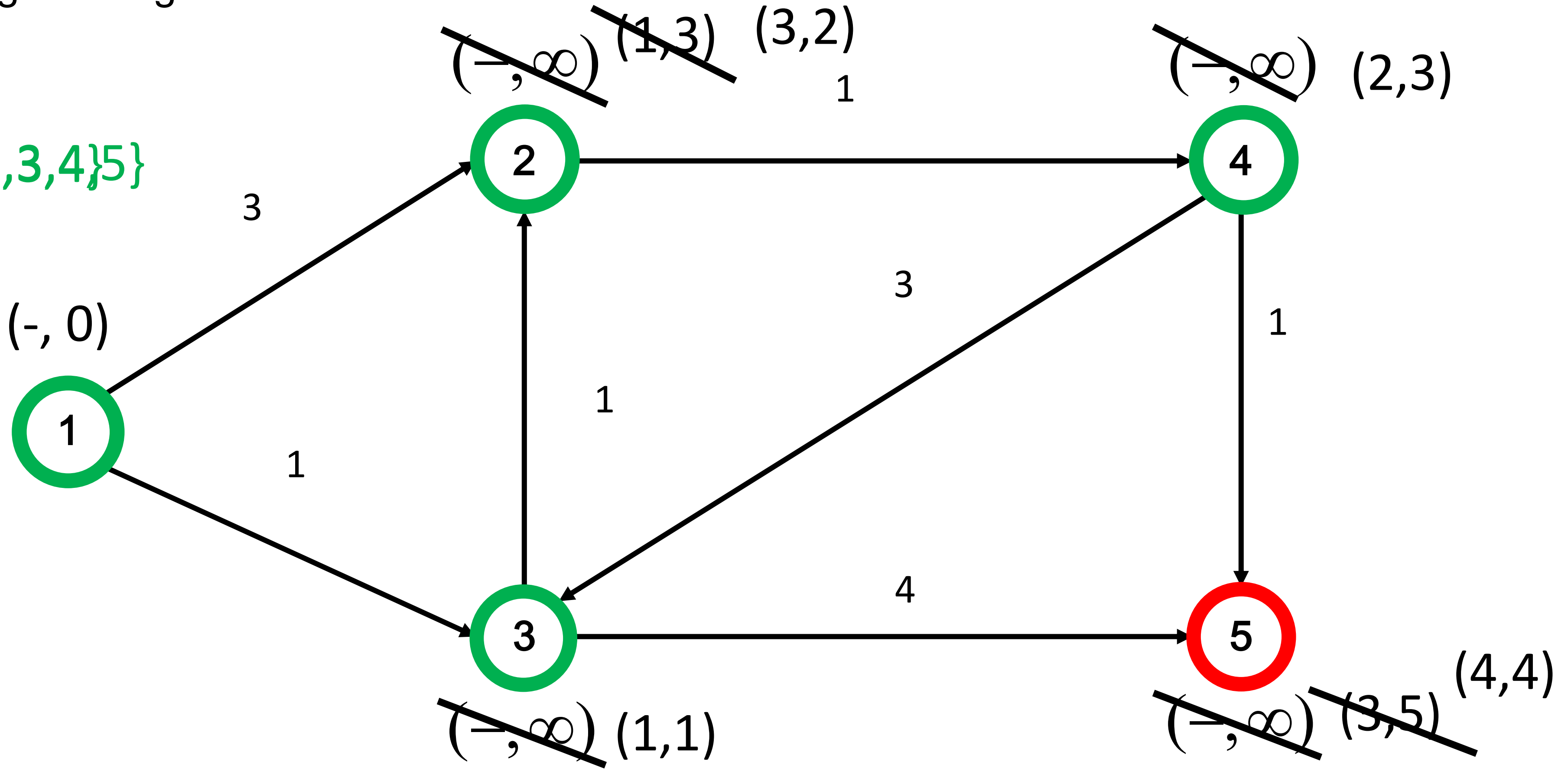


Exempel (Dijkstra)

Sök billigaste väg från nod 1 till nod 5!

D={5}

A={1,2,3,4,5}

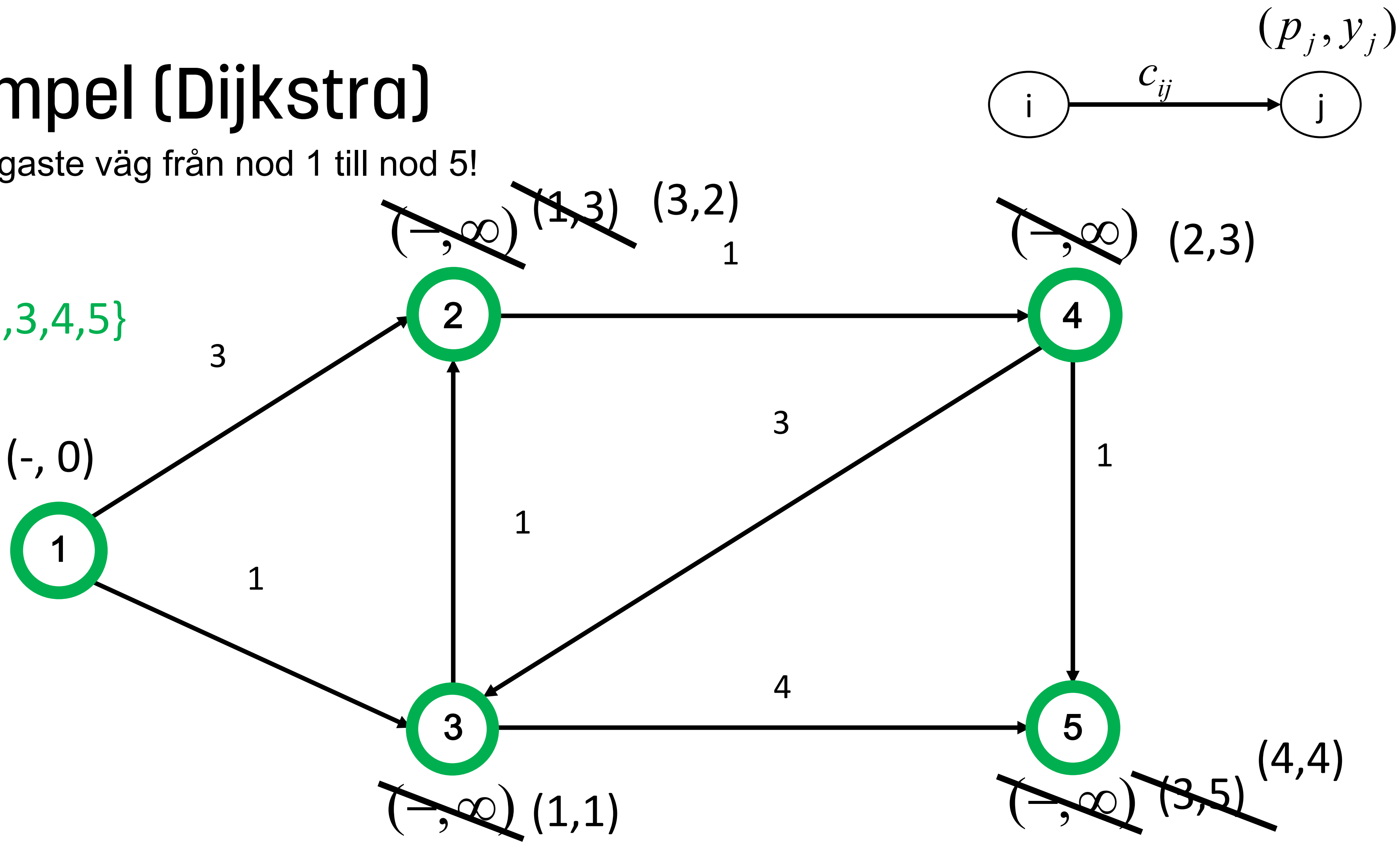


Exempel (Dijkstra)

Sök billigaste väg från nod 1 till nod 5!

D={}

A={1,2,3,4,5}

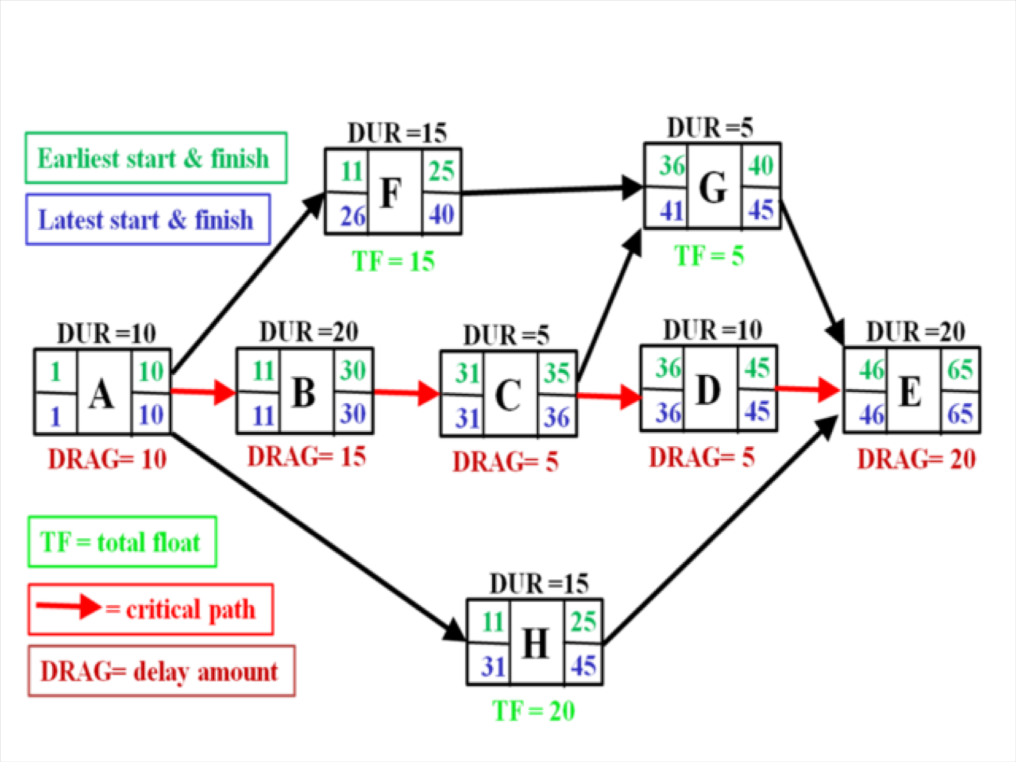


Dijkstras algoritm för max kapacitet

1. *Initialisering*: A = avsökta noder, D = ej avsökta. Märk startnoden s med $(p_s, y_s) = (-, \infty)$ (föregående nod, nodpris), övriga noder med (-,0)
2. Välj $i \in D$ med högst nodpris.
3. *Avsök nod i*: För alla utgående bågar i-j: Om $\min(y_i, c_{ij}) > y_j$ har väg med högre kapacitet hittats. Märk nod j med $(p_j, y_j) = (i, \min(y_i, c_{ij}))$
4. Flytta nod i från D till A.
5. Om D tomt, avbryt! Annars går till 2.

Praktiska exempel och alternativa målfunktioner

- Projektnätverk
  - Hur lång tid tar projektet?
    - Kostnad för dyraste väg!
  - Vad är den kritiska linjen?
    - Dyraste väg!
  - När kan vi starta med en viss aktivitet?
    - Nodpris!
- Maximera tillförlitlighet
  - Multiplikativ målfunktion



Trevlig helg!

www.liu.se

LINKÖPING UNIVERSITY