TENTAMEN

Datum:	30 augusti 2018
Tid:	8-12
Provkod:	TEN1
Kursnamn:	TNSL05 – Optimering, modellering och planering
Institution:	ITN
Antal uppgifter:	5
Betygskrav:	För godkänt krävs normalt 12 p, betyg 4 kräver 16p och betyg 5, 21p.
Examinator:	Joakim Ekström
Jourhavande lärare:	Marcus Posada, 011-363564
Kursadministratör:	Marie-Louise Gustafsson, 011-363121
Tillåtna hjälpmedel:	Miniräknare, ett A4-blad med valfri text/bilder/anteckningar på båda sidor, ordlista för översättning till svenska efter behov

Utlämning av skrivningar sker tidigast efter att resultat har meddelats med e-post. Kortfattat lösningsförslag publiceras på kursens hemsida vid skrivningstidens slut.

Tentamensinstruktioner

<u>När Du löser uppgifterna</u>

Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden Du gör.
Använd alltid de standardmetoder som behandlats på föreläsningar och lektioner.
Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

<u>Vid skrivningens slut</u>

Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget de uppgifter Du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.
Om du bifogar sidor från tentamen måste dessa sidor rivas ut och lämnas in som numrerade lösblad

LINKÖPINGS UNIVERSITET

(5p) Uppgift 1

Ett företag har produktion vid tre olika fabriker. Vi kallar dem A, B och C. De tillverkar en och samma produkt i alla tre fabrikerna. Fabrikerna har en maximal produktionskapacitet om 45, 50 respektive 35 enheter/månad. Företaget levererar sin produkt till fyra olika butiker (vi kallar dem 1, 2, 3 och 4). Butikerna har gjort prognoser på sin försäljning och efterfrågar 45, 25, 35 respektive 25 enheter av produkten under den kommande månaden. Ledningen för butik 4 har valt att inte ta emot produkter från fabrik B.

Transportkostnaden från varje fabrik till varje butik ges av tabellen nedan.

	1	2	3	4
A	22	12	6	13
B	20	22	30	25
C	15	10	7	26

Formulera företagets transportproblem som en LP-modell (ni behöver alltså inte formulera en heltalsmodell).

I denna uppgift behöver du inte använda index och summering när du formulerar din modell, men du får gärna göra så ändå.

Variabler:

x_{ij} : antal transporterade enheter från fabrik i till butik j

Parametrar:

c_{ij} : transportkostnad från fabik i till butik j

k_i : maximal kapacitet i fabrik i

e_j : prognosticerad efterfrågan i butik j

$$\min z = \sum_{i=A}^{C} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} \leq k_i \qquad \forall\ i \in \{A, B, C\}$$

$$\sum_{i=A}^{C} x_{ij} \geq e_j \qquad \forall\ j \in \{1,2,3,4\}$$

LINKÖPINGS UNIVERSITET

$x_{B4} = 0$

$x_{ij} \geq 0 \qquad \forall \ i, j$

(5p) Uppgift 2

Ett företag tillverkar två olika typer av läderväskor. Företaget har identifierat tre kritiska moment i produktionskedjan som varje väska måste gå igenom

1. Tillskärning av läder
2. Tillverkning i symaskin
3. Packning och märkning

En väska av typ 1 behöver 10 minuter för tillskärning, 7 minuter i symaskin och 3 minuter för packning och märkning. Ett handskpar av typ 2 behöver 12 minuter för tillskärning, 9 minuter i symaskin och 4 minuter för packning och märkning.

För att tillverka en väska av typ 1 behövs 4 läderenheter och för typ 2 behövs 3 läderenheter. Initialt finns 50 000 enheter läder i lager som kan användas för produktionen. För den kommande månaden kan företaget köpa in ytterligare läder från två olika leverantörer. Från leverantör 1 kan maximalt 10 000 enheter läder köpas till kostnaden 20 kr per enheter och från leverantör 2 kan en obegränsad mängd läder köpas för 60kr per enhet. Väskor av typ 1 säljs till priset 260 kr och av typ 2 till priset 250 kr. Företaget uppskattar att upp till 12 000 väskor av typ 1 och 10 000 väskor av typ 2 kan säljas den kommande månaden. Totalt finns 2500 produktionstimmar tillgängliga för tillskärning, 1750h för tillverkning i symaskin och 750h för packning, under den kommande månaden.

Företagets problem att maximera vinsten för den kommande månaden (intäkt minus kostnad för läder) har formulerats som ett linjärt optimeringsproblem och sedan lösts med AMPL/ CPLEX.

Variabel definition:
x_i: antal väskor av typ i som tillverkas, $i=1,2$
y_j:antal enheter läder som köps in från leverantör j, $j=1,2$

$$\max z = 260x_1 + 250x_2 - 20y_1 - 60y_2$$

då
$$10x_1 + 12x_2 \leq 150000 \text{ (tillskärning)}$$
$$7x_1 + 9x_2 \leq 105000 \text{ (tillverkning i symaskin)}$$
$$3x_1 + 4x_2 \leq 45000 \text{ (packning och märkning)}$$
$$4x_1 + 3x_2 - y_1 - y_2 \leq 50000 \text{ (tillgång på läder)}$$
$$y_1 \leq 10000 \text{ (max tillgång läder från försäljare 1)}$$
$$x_1 \leq 12000 \text{ (max försäljning typ 1)}$$
$$x_2 \leq 10000 \text{ (max försäljning typ 2)}$$
$$x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0 \text{ (icke-negativitet)}$$

Se nästa sida för utdata från CPLEX och frågor

LINKÖPINGS UNIVERSITET

```
CPLEX 11.0.1: sensitivity
CPLEX 11.0.1: optimal solution; objective 3587500
3 dual simplex iterations (0 in phase I)
suffix up OUT;
suffix down OUT;
suffix current OUT;
z = 3587500
: _varname   _var    :=
1  x1       12000
2  x2        2250
3  y1        4750
4  y2           0
;
: _varname _var.rc   _var.down  _var.current _var.up   :=
1  x1             0      222.5        260      1e+20
2  x2             0        60          250       300
3  y1             0      -41.4286      -20         0
4  y2           -40      -1e+20        -60       -20
;
:          _conname                  _con.slack   :=
1  tillskarning                        3000
2  symaskin                             750
3  packning                               0
4  lader_tillgang                         0
5  max_inkop_lader_forsaljare1         5250
6  max_produktion_typ1                    0
7  max_produktion_typ2                 7750
;
:          _conname                _con.dual  _con.down _con.current  _con.up  :=
1  tillskarning                        0      147000       150000     1e+20
2  symaskin                            0      104250       105000     1e+20
3  packning                         47.5       38666.7      45000     45333.3
4  lader_tillgang                     20       44750        50000     54750
5  max_inkop_lader_forsaljare1         0        4750        10000     1e+20
6  max_produktion_typ1              37.5        9285.71     12000     15000
7  max_produktion_typ2                 0        2250        10000     1e+20;
```

Utgå från utdata ovan och besvara följande frågor. (*Visa tydligt hur du kommer fram till ditt svar. Om det inte är möjligt att ange ett exakt värde i uppgift a) och b), ange ett så smalt intervall som möjligt givet informationen ovan.*)

a) Hur (både riktning och storlek på förändringen) skulle målfunktionsvärdet förändras om det istället för 50 000 enheter läder, fanns 60 000 enheter läder i lagret? (2p)

Dualvariabel för villkoret (lader_tillgang) är 20. Dvs. för en enhets ökning av tillgången på läder i lager ökar målfunktionsvärdet med 20 (inom det givna intervallet i utdatan). För 10 000 enheters ökning ökar målfunktionsvärdet med minst 20*4720=95000 kr och max 20*10000=200000 kr.

b) Hur (både riktning och storlek på förändringen) skulle målfunktionsvärdet förändras om den tillgängliga kapaciteten i symaskinerna sänktes med 500 timmar? (1p)

En minskning med 500 timmar ger inte upphov till någon förändring, då slacken i symaskinerna är 750 timmar.

LINKÖPINGS UNIVERSITET

c) Hur påverkas optimallösningen om det tillkommer ett villkor som kräver att *minst* 10% av den totala produktionen av väskor ska utgöras av väskor av typ 2? Vad händer om procentsatsen istället är 20%? (2p)

I den nuvarande optimallösningen är andelen väskor av typ 2 cirka 16 %, dvs kravet på 10 % är redan uppfyllt och ingen förändring sker. Om vi däremot kräver en andel på 20 % är den nuvarande lösningen otillåten och en reoptimering krävs.

(5p) Uppgift 3

Betrakta problemet

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + 4x_2 \\ \text{då} \quad & x_1 + x_2 \leq 10 \\ & x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Samtliga deluppgifter kan lösas utan att någon simplextablå konstrueras.

a) Rita upp det tillåtna området och bestäm grafiskt den optimala lösningen. (2p)

Optimal lösning: (8,2) med mfk-värde: 34.

b) Ange antalet baslösningar till problemet. Avgör vilka variabler som är basvariabler respektive icke-basvariabler samt variablernas värden för vardera av dessa baslösningar. (3p)

Problemet på standardform:

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + 4x_2 \\ \text{då} \quad & x_1 + x_2 + s_1 = 10 \\ & x_2 + s_2 = 2 \\ & x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Vi får en baslösning om vi sätter $n - m = 4 - 2 = 2$ variabler till 0. Det finns 6 sätt att göra det på.

Icke-basvar	Basvar
x1,x2	(s1,s2) = (10,2)
x1,s1	(x2,s2) = (10,-8) (Otillåten!)
x1,s2	(x2,s1) = (2,8)
x2,s1	(x1,s2) = (10,2)
x2,s2	Lösning saknas
s1,s2	(x1,x2) = (8,2)

LINKÖPINGS UNIVERSITET

(5p) Uppgift 4

Betrakta följande *maximeringsproblem,*

$$\begin{aligned} max\ z &= 2x_1 + 4x_2 + x_3 \\ \text{då}\quad x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 &= 20 \\ x_1 + x_2 + x_5 &= 10 \\ x_2 + x_6 &= 3 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

a) Ta fram en initial simplextablån för problemet ovan. (2p)

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
z	1	-2	-4	-1	0	0	0	0
x_4	0	1	4	3	1	0	0	20
x_5	0	1	1	0	0	1	0	10
x_6	0	0	1	0	0	0	1	3

b) Genomför en iteration av simplexalgoritmen. (2p)

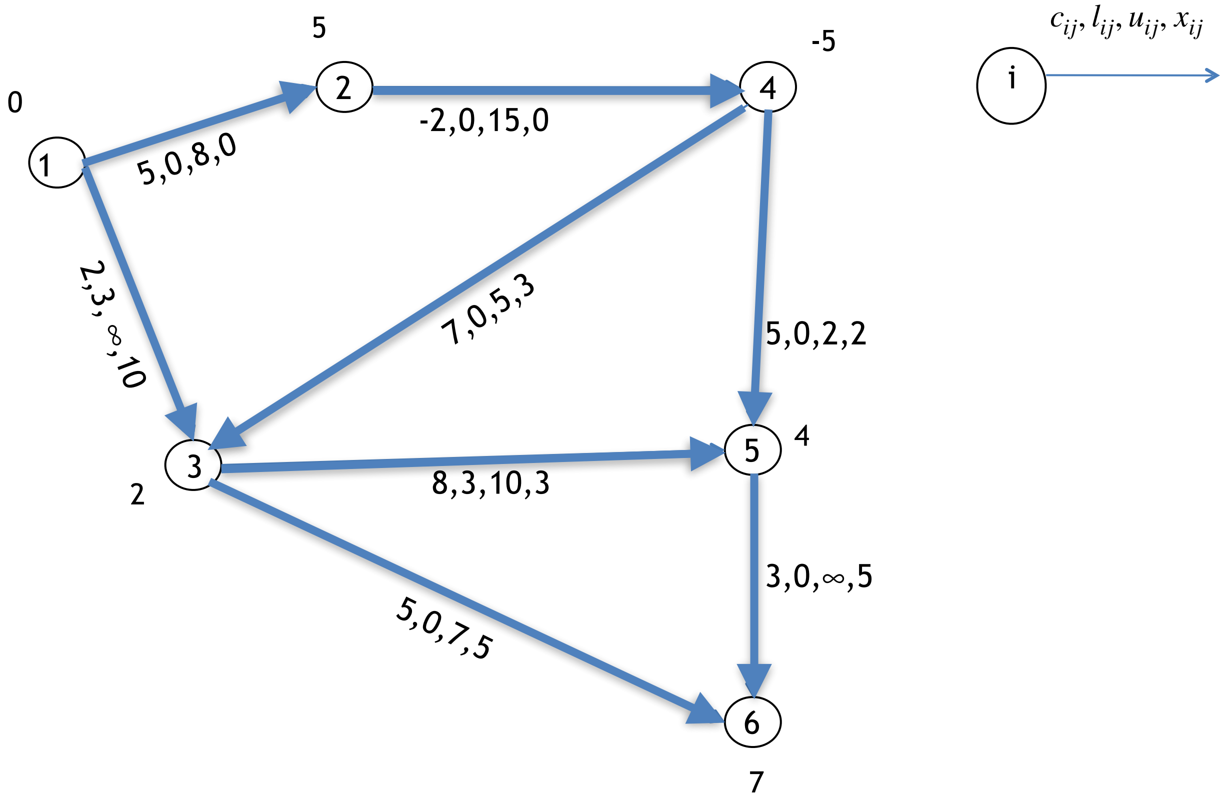
	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
z	1	-2	0	-1	0	0	4	12
x_4	0	1	0	3	1	0	-4	8
x_5	0	1	0	0	0	1	-1	7
x_2	0	0	1	0	0	0	1	3

c) Motivera varför/varför inte lösningen i b) är optimal. (1p)

Det finns fortfarande positiva reducerade kostnader kvar i tablåns målfunktionsrad (x1, x3, observera tecknen!).

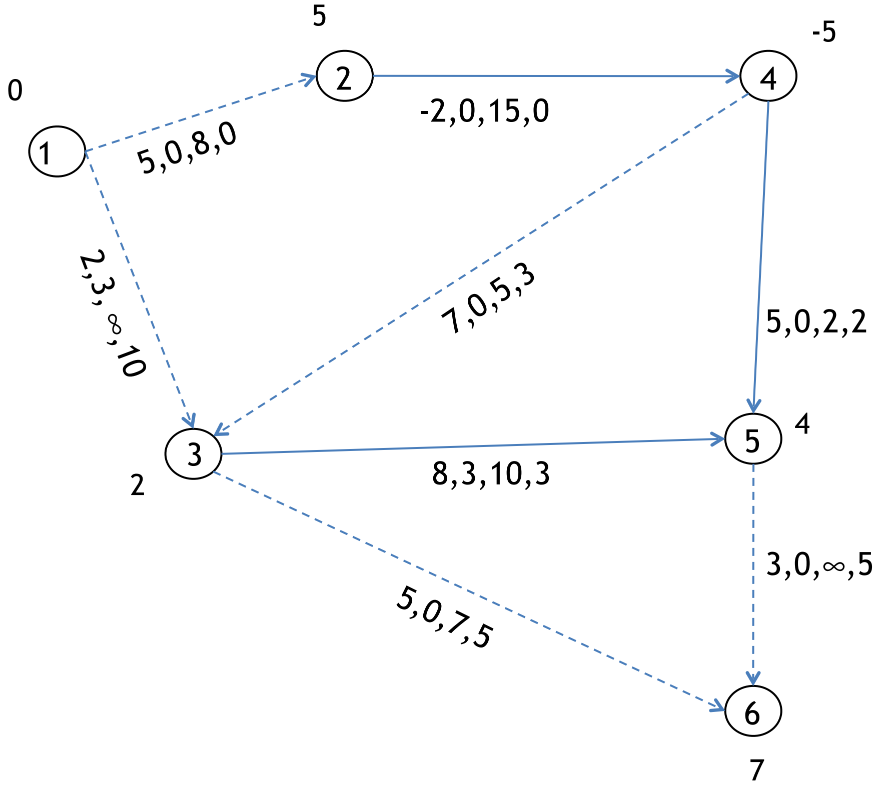
(5p) Uppgift 5

Betrakta nedanstående optimala minkostnadsflödesnätverk. Nod 1 och 4 är källor med styrka 10 respektive 5, och nod 3 och nod 6 är sänkor med styrka 5 respektive 10. Varje båge är märkt med kostnad (c_{ij}), undre gräns (l_{ij}), övre gräns (u_{ij}), samt aktuellt flöde (x_{ij}). Basbågar är märkta med streckade linjer och vid sidan av varje nod finns nodpriset.



a) Hur många basbågar måste basträdet innehålla? Markera basbågar i trädet ovan så att det utgör en giltig lösning. Bestäm aktuellt målfunktionsvärde. (2p)

Basträdet har n-1 st basbågar. Markerade med streckade linjer på nästa figur. Målfunktionsvärdet är summan av (flöde x kostnad) för samtliga bågar=115.



b) Avgör om lösningen är optimal. Motivera. (1p)

Testa avbrottskriterierna. Optimal!

c) Hur mycket måste kostnaden på båge (4,5) öka för att det inte längre ska vara intressant att skicka mer flöde på denna båge? (2p)

$\bar{c}_{45} = 5 + (-5) - 4 = -4$, dvs. kostnaden måste öka med mer än 4 enheter för att det inte längre ska vara intressant att skicka flöde på denna båge.