TNA001- Matematisk grundkurs
Tentamen 2015-08-26 - Lösningsskiss

1. a)

$$\frac{x-1}{x+3} \leq \frac{x+2}{2x+1} \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+3} - \frac{x+2}{2x+1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(2x+1)-(x+2)(x+3)}{(x+3)(2x+1)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2-6x-7}{(x+3)(2x+1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-7)}{(x+3)(2x+1)} \leq 0$$

Sedvanligt teckenschema visar att detta är uppfyllt $\Leftrightarrow x \in \left]-3,-1\right] \cup \left]-\frac{1}{2},7\right]$

Svar: Olikheten gäller för alla $x \in \left]-3,-1\right] \cup \left]-\frac{1}{2},7\right]$.

b)

$$\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right) = \sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{2\pi}{3} - 2x = 2x + \frac{\pi}{4} + n2\pi \text{ eller } \frac{2\pi}{3} - 2x = \pi - \left(2x+\frac{\pi}{4}\right) + n2\pi \Leftrightarrow \text{ [den sista ekvationen saknar lösning]}$$

$$4x = \frac{5\pi}{12} + n2\pi \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{48} + n\frac{\pi}{2}$$

Svar: $x = \frac{5\pi}{48} + n\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$

2. a) Vi sätter in linjens ekvation i planets för att få villkor på parametern t vid ev. skärning.

$$0 + 2t + 3(2+2t) - 2(1-t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{2}{5}$$

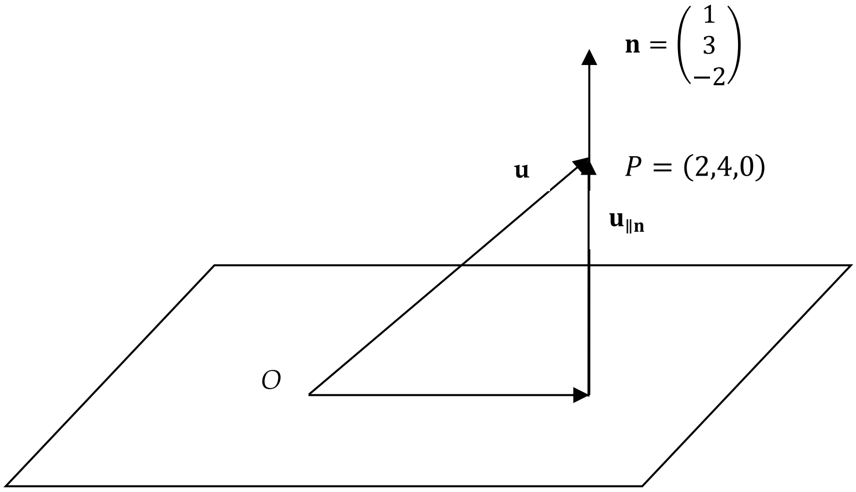
Med detta värde på t får vi skärningspunkten $\left(-\frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}\right)$

Vi kontrollerar att denna punkt även tillhör planet. Insättning av punkten i planets ekvation ger oss

$$-\frac{4}{5} + 3 \cdot \frac{6}{5} - 2 \cdot \frac{7}{5} = \frac{-4+18-14}{5} = 0$$

Svar: Skärning i punkten $\left(-\frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}\right)$

b) $t = 1$ ger $P = (2,4,0)$ och vi ritar en figur.



Låt $\mathbf{u} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$. Av projektionsformeln får vi

$$\mathbf{u}_{\parallel\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}}{14}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Sökt avstånd = $|\mathbf{u}_{\parallel\mathbf{n}}| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{14}$

Svar: Avståndet är $\sqrt{14}$ l.e.

3. a) Låt $z = a + ib, a, b \in \mathbb{R}$. Vi får

$$\frac{z}{\bar{z}} - \frac{\bar{z}}{z} = \frac{a+ib}{a-ib} - \frac{a-ib}{a+ib} = \frac{(a+ib)^2 - (a-ib)^2}{(a-ib)(a+ib)} = \frac{4iab}{a^2+b^2}$$

Detta komplexa tal har realdel = 0, v.s.v.

b)

$$\left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)^{18} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^{18} = \frac{1}{2^9}e^{i\frac{54\pi}{4}} = \frac{1}{2^9}e^{i\left(12\pi + \frac{3\pi}{2}\right)} = \frac{1}{2^9}e^{i\frac{3\pi}{2}} = \frac{1}{2^9}\cdot(-i) = -i\frac{1}{2^9}$$

Svar: $-i\frac{1}{2^9}$

4. a) Se kurslitteraturen.

b) Summan av de n första jämna talen är

$$\sum_{k=1}^{n} 2k = [\text{aritmetisk summa}] = \frac{n}{2}(2+2n) = n + n^2$$

Svar: Summan av de n första jämna talen är $n + n^2$.

5. a)

$$e^{4x} + e^{2x} = 6 \Leftrightarrow [t = e^{2x} > 0] \Leftrightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow e^{2x} = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln 2$$

Svar: $x = \frac{1}{2}\ln 2$

b) $\ln|x-2| + |\ln x| = \ln 2$

Vi har $|x-2| = \begin{cases} x-2, x \geq 2 \\ 2-x, x \leq 2 \end{cases}$, och observerar att $\ln|x-2|$ är definierat för alla $x \in \mathbb{R}, x \neq 2$.

Vidare är $|\ln x| = \begin{cases} \ln x\,, x \geq 1 \\ -\ln x\,, 0 < x \leq 1 \end{cases}$.

Alltså är alla termerna i ekvationen samtidigt definierade för $x > 0, x \neq 2$.

Vi studerar ekvationen olika fall:

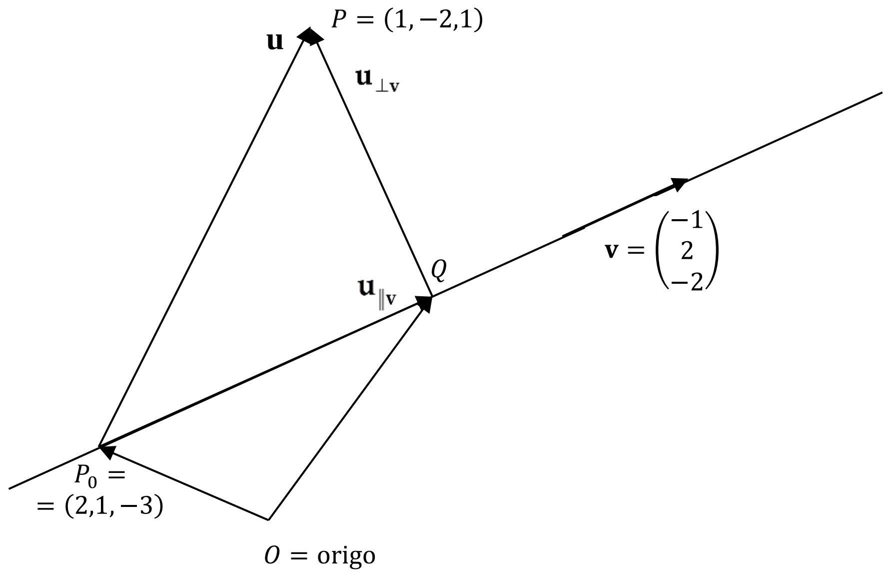
$0 < x \leq 1$: $\ln(2-x) - \ln x = \ln 2 \Leftrightarrow \frac{2-x}{x} = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$, som duger.

$1 \leq x < 2$: $\ln(2-x) + \ln x = \ln 2 \Leftrightarrow 2x - x^2 = 2$, som saknar reella lösningar.

$x > 2$: $\ln(x-2) + \ln x = \ln 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{3}$, där enbart $x = 1 + \sqrt{3}$ duger

Svar: $x = \frac{2}{3}$ eller $x = 1 + \sqrt{3}$

6. Vi ritar först en figur med relevanta vektorer.



Vi söker koordinaterna för punkten Q och bestämmer därför denna punkts ortsvektor $\overrightarrow{OQ}$. Vi har

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0Q} = \overrightarrow{OP_0} + \mathbf{u}_{\parallel\mathbf{v}}$$

där

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{P_0P} = \begin{pmatrix}-1\\-3\\4\end{pmatrix}$$

och (projektionsformeln)

$$\mathbf{u}_{\parallel\mathbf{v}} = \frac{\begin{pmatrix}-1\\-3\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix}}{9}\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix} = -\frac{13}{9}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix}.$$

Alltså

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP_0} + \mathbf{u}_{\parallel\mathbf{v}} = \begin{pmatrix}2\\-\ 1\\-3\end{pmatrix} - \frac{13}{9}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}31\\-17\\-1\end{pmatrix}$$
,

vilket innebär att

$$Q = \left(\frac{31}{9}, -\frac{17}{9}, -\frac{1}{9}\right).$$

Svar: $Q = \left(\frac{31}{9}, -\frac{17}{9}, -\frac{1}{9}\right)$

7. Vi skall med induktion visa att $3^n \geq 2n^2 + 1$ gäller för alla $n \in Z^+$.

I. Påståendet gäller för $n = 1$ ty vi har
VL(1) $= 3^1$ och HL(1) = $2\cdot 1^2 + 1 = 3$

II. Antag att påståendet gäller för $n = p, p \in Z^+$, d.v.s. vi antar att $3^p \geq 2p^2 + 1$
Vi får

$$\text{VL}(p + 1) = 3^{p+1} = 3^p \cdot 3 \geq [\textit{Enligt antagandet}] \geq (2p^2 + 1)\cdot 3 = 6p^2 + 3$$

Eftersom

$$H(p+1) = 2(p+1)^2 + 1 = 2p^2 + 4p + 3,$$

så gäller påståendet även för $n = p + 1$ om vi kan visa att $6p^2 + 3 \geq 2p^2 + 4p + 3$.
Vi har att

$$6p^2 + 3 \geq 2p^2 + 4p + 3 \Leftrightarrow 4p^2 - 4p \geq 0 \Leftrightarrow 4p(p-1) \geq 0,$$

där den sista olikheten uppenbart är sann ty $p \in Z^+$. På grund av ekvivalenserna ovan gäller då även den första olikheten.

Vi har alltså visat att om $VL(p) \geq HL(p)$ så medför det att även $VL(p+1) \geq HL(p+1)$, d.v.s. om påståendet gäller för $n = p$ så gäller det även för $n = p + 1$.

III. Enligt induktionsprincipen gäller påståendet (genom kombination av resultaten i steg I och II) för alla $n \in Z^+$, v.s.v.