

## TNA001 - FÖ 3 Kap 1.4 (fr.o.m. sid. 27), Kap 1.5 (t.o.m. sid 33)

### 1.4 Allmänna polynomekvationer

a) Vad menas med ett *polynom* och en *polynomekvation*?

b) Vad menas med *polynomdivision*? Vi illustrerar med ett exempel.

#### Exempel 12

Skriv det rationella uttrycket  $\frac{2x^3-3x^2-27}{x^2-9}$  som en summa av ett polynom och ett rationellt uttryck.

c) *Faktorsatsen* (Sats 1.2 sid. 28 i FN)

**Exempel 13**

a) Faktorisera i förstagsgradsfaktorer polynomet  $16 + 20x + 2x^2 - 2x^3$ .

b) Bestäm rötterna till polynomekvationen  $16 + 20x + 2x^2 - 2x^3 = 0$  (tredjegradekvation).

**Anm:** På föreläsningen kommer vi att först lösa a)-uppgiften och sedan, med hjälp av denna, dra slutsatser om b)-uppgiften.

Nedan följer en fullständig lösning till Ex 13b), utan att vi först gjort a). I lösningen ingår en polynomdivision som dock inte redovisas här. *Lägg märke till att vi, då vi löser den uppkomna andragradsekvationen, dividerar med faktorn  $-2$ , som ju förstås skall finnas med i lösningen till a)-uppgiften!*

**Ex 13 b)** Bestäm rötterna till polynomekvationen  $16 + 20x + 2x^2 - 2x^3 = 0$ .

Låt  $p(x) = 16 + 20x + 2x^2 - 2x^3$ . Vi ser (prövning) att  $x = -1$  är en lösning till ekvationen, d.v.s.  $p(-1) = 0$ . Då är, enligt faktorsatsen,  $x - (-1) = x + 1$  faktor i  $p$ . Alltså kan vi skriva den givna ekvationen

$$p(x) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)k(x) = 0$$

Genom polynomdivisionen  $\frac{p(x)}{x+1} = k(x)$  (visas alltså inte här) får vi  $k(x) = -2x^2 + 4x + 16$  och därmed ges ev. övriga lösningar till den givna ekvationen av villkoret

$$\begin{aligned} -2x^2 + 4x + 16 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 &= 0 \Leftrightarrow /kvadratkomplettera/ \\ \Leftrightarrow (x - 1)^2 - 1 - 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow x - 1 &= \pm 3 \\ \Leftrightarrow x &= -2 \text{ eller } x = 4 \end{aligned}$$

**Svar:** Ekvationen har lösningarna  $x = -1$ ,  $x = -2$  eller  $x = 4$ .

## 1.5 Olikheter

- a) Vi illustrerar hur man bestämmer **lösningsmängden till olikheter** med hjälp av ett par exempel.

### Exempel 14

Lös olikheten

$$\text{a) } \frac{3}{x-1} \leq -\frac{2}{x}$$

$$\text{b) } x^2 > 5$$

$$\text{c) } 2x^2 + 1 > 3x$$

c) Vi flyttar över och faktorerar, vilket ger

$$\begin{aligned}
 2x^2 + 1 > 3x &\Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 > 0 \Leftrightarrow 2\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\right) > 0 \Leftrightarrow 2\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\right] > 0 \\
 &\Leftrightarrow 2\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + \frac{8}{16}\right] > 0 \Leftrightarrow 2\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}\right] > 0 \Leftrightarrow 2\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right] > 0 \Leftrightarrow /konjugatregeln/ \\
 &\Leftrightarrow 2\left(x - \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) > 0 \Leftrightarrow 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 1) > 0.
 \end{aligned}$$

Teckenstudium:

		$\frac{1}{2}$		1	
2	+	+	+	+	+
$x - \frac{1}{2}$	-	0	+	+	+
$x - 1$	-	-	-	0	+
$2(x - 1)\left(x - \frac{1}{2}\right)$	+	0	-	0	+

→ x

Vilket ger lösningsmängden  $x \in L = ]-\infty, \frac{1}{2}[ \cup ]1, \infty[$ .

Svar: Olikheten har lösningsmängden  $x \in L = ]-\infty, \frac{1}{2}[ \cup ]1, \infty[$ .

# Vad menas med en fullständig lösning?

(Se även kursinformationen!)

## Exempel 15

Om vi har till uppgift (Ex 14b) att bestämma lösningsmängden till olikheten  $\frac{3}{x-1} \leq -\frac{2}{x}$  kan en fullständig lösning se ut på följande sätt:

- Vi flyttar alla termer till VL. För den givna olikheten har vi

$$\frac{3}{x-1} \leq -\frac{2}{x} \Leftrightarrow \frac{3}{x-1} + \frac{2}{x} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underset{\text{Gör liknämigt}}{\frac{3x+2(x-1)}{x(x-1)}} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3x+2x-2}{x(x-1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{5x-2}{x(x-1)} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underset{\text{Faktorisera}}{\frac{5(x-\frac{2}{5})}{x(x-1)}} \leq 0$$

- Vi använder ett **teckenschema** för att studera det sista stegets olikhet:

		0		$\frac{2}{5}$		1		$\rightarrow x$
5	+	+	+	+	+	+	+	
$x - \frac{2}{5}$	-	-	-	0	+	+	+	
$x$	-	0	+	+	+	+	+	
$x - 1$	-	-	-	-	-	0	+	
$\frac{5(x-\frac{2}{5})}{x(x-1)}$	-	Ej def.	+	0	-	Ej def.	+	

- Eftersom alla olikheter ovan är ekvivalenta så har vi av teckenschemat att den ursprungliga (givna) olikheten gäller för  $x \in L = ]-\infty, 0[ \cup [\frac{2}{5}, 1[$ .

- Kontroll:** Vi prövar med att sätta in några *lämpliga*  $x$ -värden i den ursprungliga (givna) olikheten

$$\begin{array}{lll} x = -1: & VL = \frac{3}{-1-1} = -\frac{3}{2}, & HL = -\frac{2}{-1} = 2 \quad \text{Alltså har vi } VL \leq HL \\ x = \frac{1}{5}: & VL = \frac{3}{\frac{1}{5}-1} = \frac{3}{-\frac{4}{5}} = -\frac{15}{4}, & HL = -\frac{2}{\frac{1}{5}} = -10 \quad \text{Alltså har vi } VL > HL \\ x = \frac{2}{5}: & VL = \frac{3}{\frac{2}{5}-1} = \frac{3}{-\frac{3}{5}} = -5, & HL = -\frac{2}{\frac{2}{5}} = -5 \quad \text{Alltså har vi } VL \leq HL \\ x = \frac{4}{5}: & VL = \frac{3}{\frac{4}{5}-1} = \frac{3}{-\frac{1}{5}} = -15, & HL = -\frac{2}{\frac{4}{5}} = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2} \quad \text{Alltså har vi } VL \leq HL \end{array}$$

- Svar:**  $x \in L = ]-\infty, 0[ \cup [\frac{2}{5}, 1[$ .